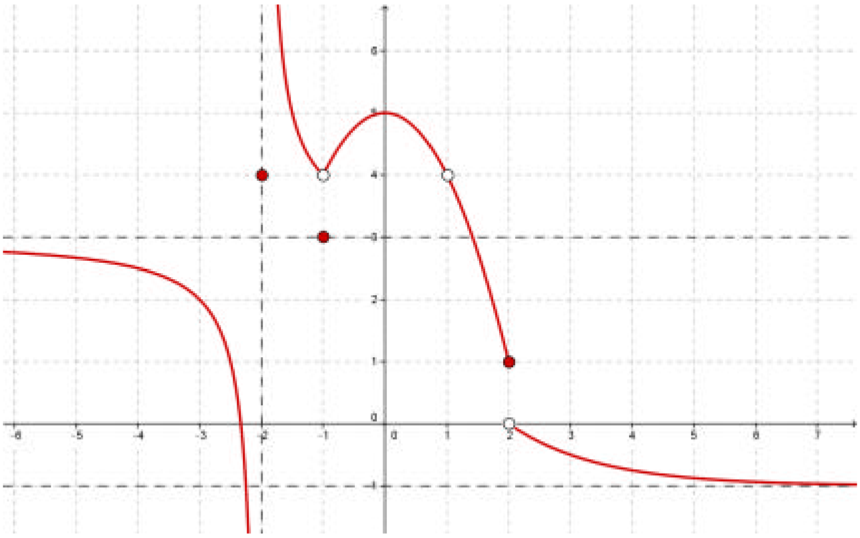
Nom: **Grup:**

1.- Trobeu la funció inversa o recíproca de la funció $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$. Digueu quin és el domini i recorregut de la funció y=f(x).

(1 punt)

2.- Donada la gràfica de la funció **Y = f(x)**

- Calculeu els límits següents:



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x)=$

d) $\lim_{x\to-2^+} f(x)=$

e) f(–2)=

f) f(–1)=

g) $\lim_{x\to-1} f(x)=$

h) f(1)=

i) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=$

j) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=$

- Indiqueu en quins punts **Y = f(x)** no és contínua, el tipus de discontinuïtats de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1 +0,7=1,7 punts)

3.-

$$f(x)=\begin{cases} =a\left(\dfrac{1}{2}\right)^x & si \quad x\le 1 \\ =-x^2+6x-4 & si \quad 1<x<4 \\ =x+b & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

Calculeu "a" i "b" per a què la funció f(x) sigui contínua a tot R. I dibuixeu la gràfica de la funció per aquests valors de a i b

(1,5+0,3=1,8 punts)

4.- Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2}$

a) Quin és el seu domini màxim?
b) Estudia la seva continuïtat i classifica les seves discontinuïtats.
c) Trobeu les seves asímptotes.

(0,25+1+1=2,25 punts)

5.- Calculeu els límits següents:

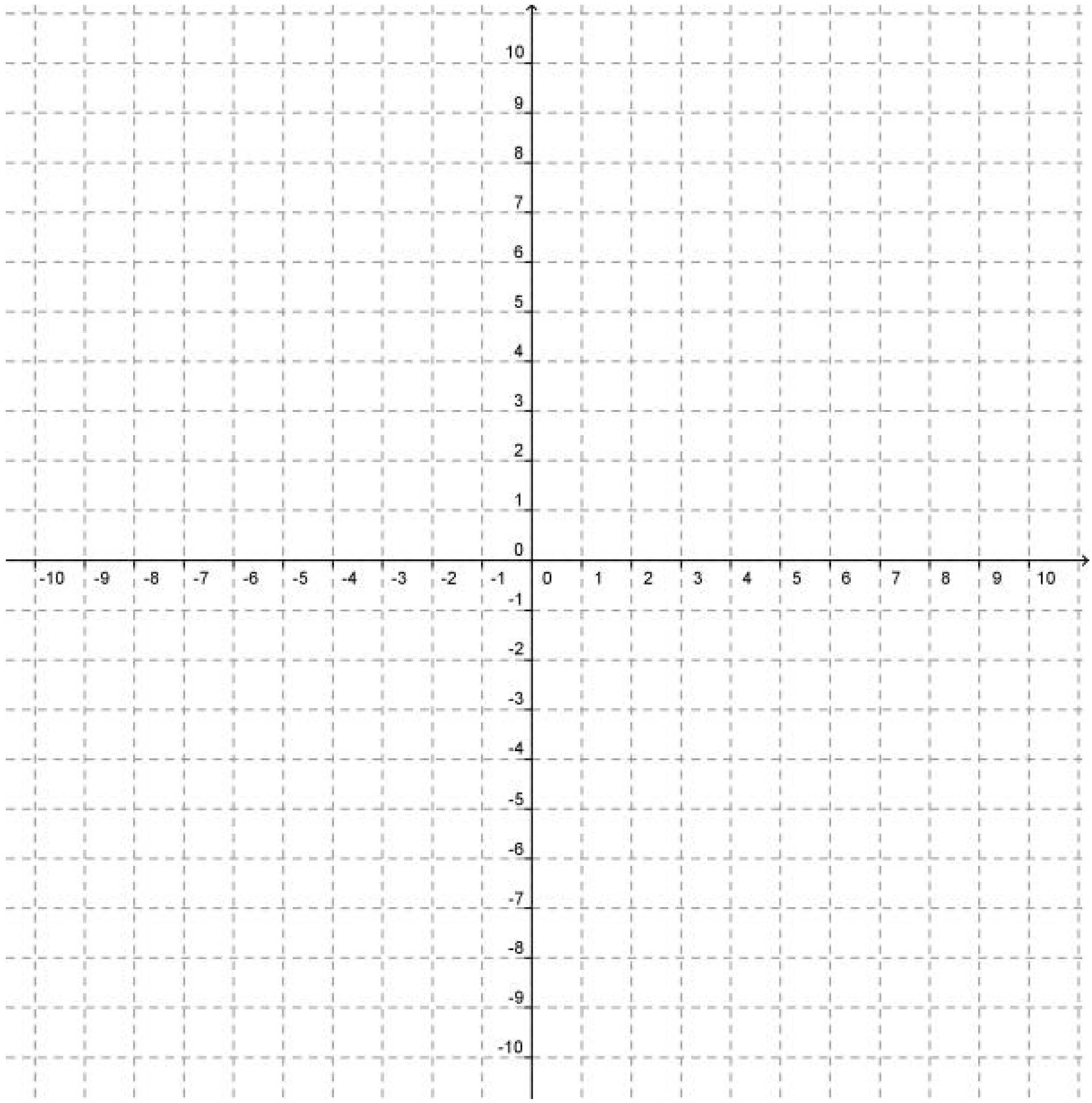
a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{18\sqrt[3]{x^6}-4x^2}{3x^2-8x}-\dfrac{10x+2}{\sqrt{25x^2+3x}}\right]$

c) $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{12+x}-x}{x-4}\right)$

b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{x^3+14x^2}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{6x}$

*(0,75*3+1= 3,25 punts)*


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

Nom: **Grup:**

1.- Trobeu la funció inversa o recíproca de la funció $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$. Digueu quin és el domini i recorregut de la funció y=f(x).

(1 punt)

Considerem la funció $y=\dfrac{2x}{x-1}$ **; aïllem la x**

$$y(x-1)=2x \Rightarrow y\cdot x-y=2x \Rightarrow y\cdot x-2x=y \Rightarrow x(y-2)=y \Rightarrow x=\frac{y}{y-2}$$

i finalment permutem la X i la Y obtenint doncs que la funció buscada és $y=\dfrac{x}{x-2}$ **és a dir**

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{x-2}$$

Es pot comprovar (encara que l'enunciat no ho demana) que

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{2\dfrac{x}{x-2}}{\dfrac{x}{x-2}-1}=\frac{\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{x-x+2}{x-2}}=\frac{2x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{2}=x$$

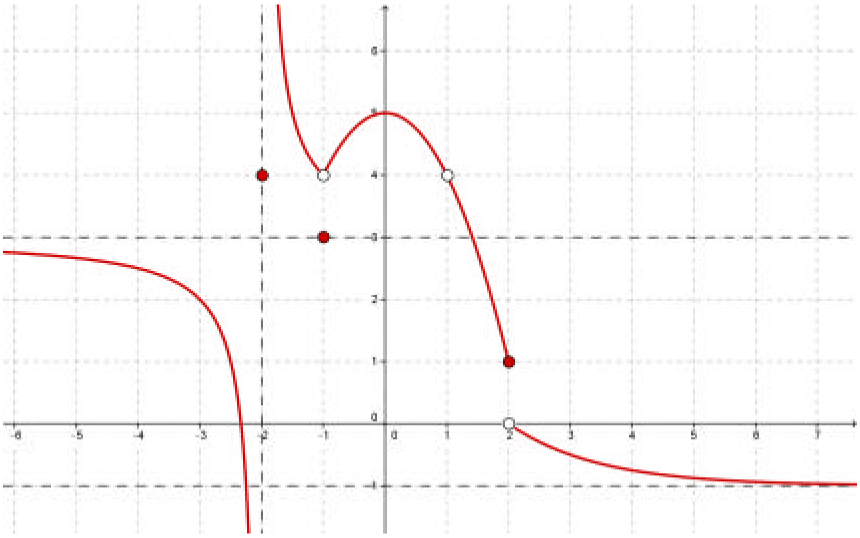
$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1}-2}=\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2x-2x+2}{x-1}}=\frac{2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2}=x$$

I contestant al que es pregunta tenim que:

$$Dom(f)=R-\{1\}$$

$$\text{Rec}(f)=Domini\left(f^{-1}\right)=R-\{2\}$$

2.- Donada la gràfica de la funció **Y = f(x)**
Calculeu els límits següents:



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{3}$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{-1}$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \mathbf{-\infty}$

d) $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \mathbf{+\infty}$

e) f(–2)=**4**

f) f(–1)=**3**

g) $\lim_{x\to-1} f(x) = \mathbf{4}$

h) f(1)= $\nexists$

i) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \mathbf{1}$

j) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \mathbf{0}$

- Indiqueu en quins punts **Y = f(x)** no és contínua, el tipus de discontinuïtats de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1 +0,7=1,7 punts)

En X = – 2 discontinuïtat asimptòtica.
En X = – 1 evitable
En X = 1 discontinuïtat evitable
En X = 2 discontinuïtat de salt.
I les asímptotes són:
X= – 2 tendint sempre cap a –∞ per l'esquerra i tendint sempre cap a +∞ per la dreta
Y= 4 per $X \to -\infty$ **i**
Y= –1 per $X \to +\infty$

(0,1·9 +0,8=1,7 punts)

3.-

$$f(x) = \begin{cases} = a\left(\dfrac{1}{2}\right)^x & si \quad x \le 1 \\ = -x^2 + 6x - 4 & si \quad 1 < x < 4 \\ = x + b & si \quad x \ge 4 \end{cases}$$

Calculeu "a" i "b" per a què la funció f(x) sigui contínua a tot R. I dibuixeu la gràfica de la funció per aquests valors de a i b

(1,5+0,3=1,8 punts)

Només hi ha dubte sobre la continuïtat en el punts x= 1 i x = 4 ja que en els altres intervals oberts és exponencial o polinòmica i per tant contínua. Així doncs podem dir que la funció és contínua sense cap dubte en $(-\infty,1) \cup (1,4) \cup (4,+\infty)$

Ara calculem el valor de "a" i "b" per a que també sigui contínua en x = 1 i x = 4
En X= 1

- $f(1) = a\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{a}{2}$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} a\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{a}{2}$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2 + 6x - 4 = -1 + 6 - 4 = 1$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que $\frac{a}{2}=1 \Leftrightarrow a=2$

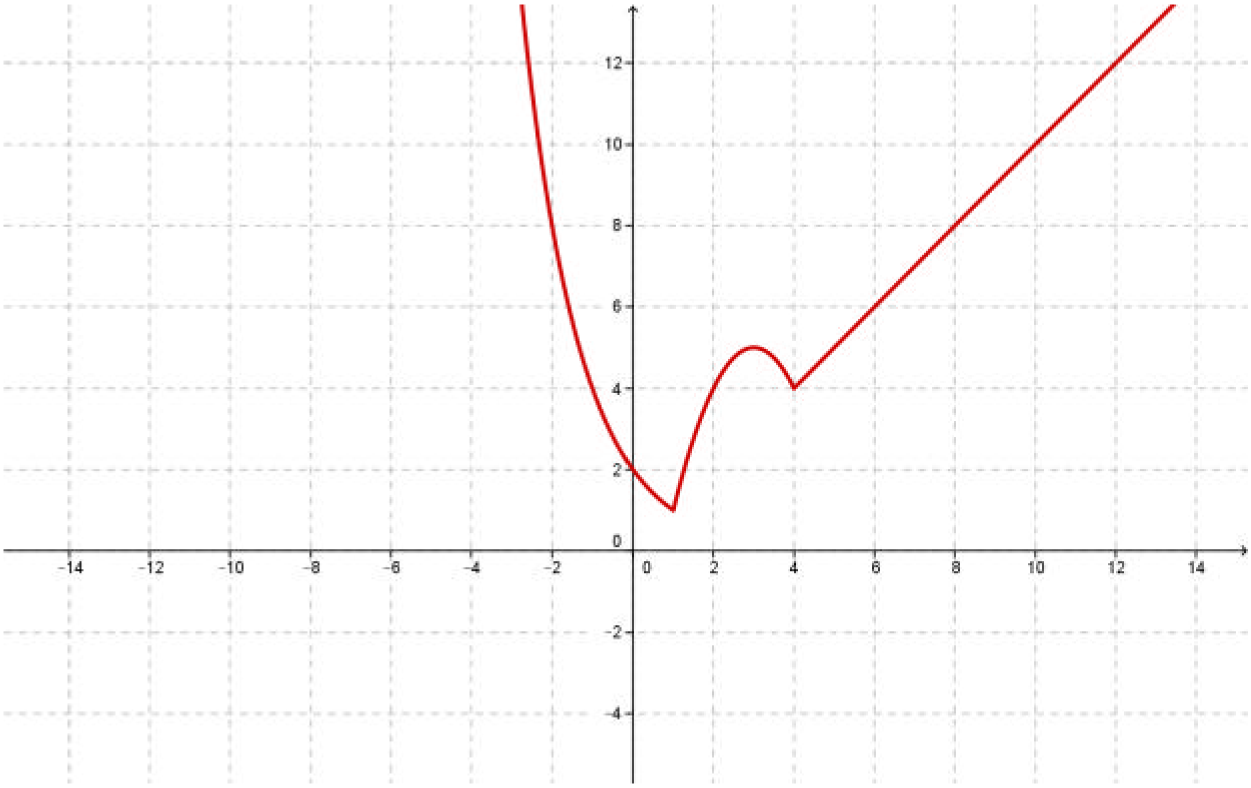
En X= 4

- **f(4)= 4 + b**
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} -x^2 + 6x - 4 = -16 + 24 - 4 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (x+b) = 4+b$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que 4 + b = 4 $\Leftrightarrow$ b=0

Per tant f(x) és contínua en tot R $\Leftrightarrow$ (a=2 i b=0)

I la gràfica de la funció és per aquest cas (a=2 i b=0)



4.- Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 - x - 2}$

d) Quin és el seu domini màxim?
e) Estudia la seva continuïtat i classifica les seves discontinuïtats.
f) Trobeu les seves asímptotes.

(0,25+1+1=2,25 punts)

a) Domini:
Cal treure els zeros del denominador

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} = 4/2 = 2 \\ = -2/2 = -1 \end{cases}$$

Així doncs el domini és: $R - \{-1, 2\}$

b) Continuïtat.
Com és un quocient de polinomis la funció és contínua en tots els punts del seu domini $R-\{-1,2\}$

I ara anem de classificar les dues discontinuïtats que presenta:
En X=–1

- $\nexists f(-1) \Rightarrow$ **és discontínua en x=–1**
- **Ara anem a calcular el límit**

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x^2+3x)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+3x)}{(x-2)} = \frac{1-3}{-1-2} = \frac{2}{3}$$

Així doncs la discontinuïtat en X=–1 és evitable

En X=2

- $\nexists f(2) \Rightarrow$ **és discontínua en x=2**
- **Ara anem a calcular el límit**

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2} = \frac{8+16+6}{0} = \infty$$ **Així doncs la discontinuïtat en X=3 és asimptòtica.**

I si volem saber l'aspecte de la gràfica al seu voltant només cal que mirem els límits laterals.
Com a c) es demanen les asímptotes ho faig després

ASIMPTOTES VERTICALS
Ja hem vist que X= 3 és una asímptota vertical i com

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2} = \frac{30}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2} = \frac{30}{0^+} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$$

Per l'esquerra la funció s'acosta a –∞ i per la dreta a +∞

ASIMPTOTES HORITZONTALS I INCLINADES.
Observació important: **Com és un quocient de polinomis si hi ha una assímptota per x $\longrightarrow +\infty$ també ho serà per x $\longrightarrow -\infty$**
així dons faren els càlcul només per x $\longrightarrow +\infty$

Horitziontals no hi ha ja que $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \notin R$

Però sí inclinada. Anem a calcula la m i n de l'assímptota: Y= m X + n

m= $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+4x^2+3x}{\left(x^2-x-2\right)x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1$

n= $\lim_{x\to +\infty} f(x) - mx$

$$n=\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2-x-2}-x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+3x-x\left(x^2-x-2\right)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}+4x^2+3x\cancel{-x^3}+x^2+2x}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}5=5$$

Així doncs la recta Y = X + 5 és assímptota per x $\to +\infty$ i per x $\to -\infty$

5.- Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{18\sqrt[3]{x^6-4x^2}}{3x^2-8x}-\frac{10x+2}{\sqrt{25x^2+3x}}\right]$

b) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^3+14x^2}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to4}\left(\frac{\sqrt{12+x}-x}{x-4}\right)$

d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{6x}$

*(0,75*3+1= 3,25 punts)*

SOLUCIÓ

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{18\sqrt[3]{x^6-4x^2}}{3x^2-8x}-\frac{10x+2}{\sqrt{25x^2+3x}}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{18\sqrt[3]{x^6-4x^2}}{3x^2-8x}-\frac{10x+2}{\sqrt{25x^2+3x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{18x^2}{3x^2}-\frac{10x}{5x}\right]=6-2=4$$

b) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^3+14x^2}$

Aquí primer fem el canvi de variable de x per – x per tal que els límit sigui de $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{-x}}{(-x)^3+14(-x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{-x}}{-x^3+14x^2}=\frac{0^+}{-\infty}=0^-$$

c) $$\lim_{x\to4}\left(\frac{\sqrt{12+x}-x}{x-4}\right)=\frac{\sqrt{16}-4}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{\left(\sqrt{12+x}-x\right)\left(\sqrt{12+x}+x\right)}{(x-4)\left(\sqrt{12+x}+x\right)}\right)=\lim_{x\to4}\left(\frac{\left(\left(\sqrt{12+x}\right)^2-x^2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{12+x}+x\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to4}\left(\frac{\left(12+x-x^2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{12+x}+x\right)}\right)=\lim_{x\to4}\left(\frac{\cancel{(x-4)}(-x-3))}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{12+x}+x\right)}\right)=\frac{-7}{8}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{6x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{6x}=1^{\infty}$$ **així doncs anem a fabricar el número e**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+3}{x}-1\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+3-x}{x}\right)^{6x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3/3}{x/3}\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(x/3)}\right)^{6x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\left(\frac{x}{3}\right)6x\left(\frac{3}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\left(\frac{x}{3}\right)}\right]^{6x\left(\frac{3}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{18x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}18}=e^{18}$$