Nom: **Grup:**

1) Donada la funció

$$f(x)=\begin{cases} -x+a & si \quad x<-2 \\ -x^2+1 & si \quad -2\le x\le 1 \\ b & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Trobeu els valors dels paràmetres "a" i "b" per tal que la funció sigui contínua a tot $\mathbb{R}$
b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de "a" i "b"

(1,5 punts)

2) Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-4x}$

a) Trobeu el domini, estudieu la continuïtat d'aquesta funció i indiqueu de quin tipus són les discontinuïtats que presenta.
b) Trobeu les asímptotes de la funció i indiqueu quin és l'aspecte de la gràfica al seu voltant.
c) Calculeu i simplifiqueu al màxim la derivada de la funció.

(0,75·2+1=2,5 punts)

3) Deriveu les funcions següents:

a) $f(x)=\dfrac{5}{4}x^4+\dfrac{7}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x$

b) $f(x)=\left(x^3+5x^2+1\right)^7$

c) $f(x)=6^{4x+5}+x^6+6^6$

d) $f(x)=\ln\left(8x^3+7x+9\right)$

e) $f(x)=\sin^2 x-\sin\left(2x^2\right)$

f) $f(x)=3x^3\cdot e^{-2x+3}$

(6 punts)

Nom: **Grup:**

1) Donada la funció

$$f(x)=\begin{cases} -x+a & si \quad x<-2 \\ -x^2+1 & si \quad -2\le x\le 1 \\ b & si \quad x>1 \end{cases}$$

- Trobeu els valors dels paràmetres "a" i "b" per tal que la funció sigui contínua a tot $\mathbb{R}$

La funció és clarament contínua en $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)=R-\{-2,1\}$

Ara hem d'imposar que la funció sigui contínua en x=–2 i en x=1

I) per a que sigui contínua en X= –2 han de ser iguals aquestes tres coses:
- $f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$
- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} -x+a = -(-2)+a = 2+a$
- $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} -x^2+1 = -(-2)^2+1 = -4+1 = -3$

Així doncs cal que 2+a= –3 $\Rightarrow$ **a = – 5**

II) per a que sigui contínua en X=1 han de ser iguals aquestes tres coses:
- $f(1) = -(1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2+1 = -(-1)^2+1 = -1+1 = 0$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} b = b$

Així doncs cal que $\Rightarrow$ **b = 0**

- Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de "a" i "b"

$$f(x)=\begin{cases} -x-5 & si \quad x<-2 \\ -x^2+1 & si \quad -2\le x\le 1 \\ 0 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Només cal que representem cada tros: una semirecta inclinada, un tros de paràbola i una semirecta horitzontal

Y = – X – 5

X	Y
–7	2
–5	0
–3	–2
–2	–3

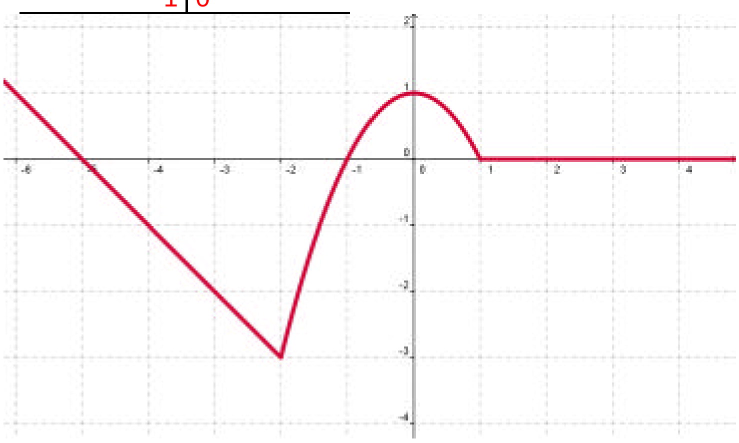
Y = – X^2+1

Paràbola amb branques cap a baix i vèrtex en x=0

X	Y
–2	–3
–1	0
0	1 vèrtex
1	0

Y=0

Recta horitzontal de la qual només ens quedem amb l'interval (1,+∞)



(1,5 punts)

2) Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-4x}$

a) Trobeu el domini, estudieu la continuïtat d'aquesta funció i indiqueu de quin tipus són les discontinuïtats que presenta.

- Domini. Només cal treure els punt on s'anul·la el denominador.

$$x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

Així doncs el Domini(f) = R –{0,4}

- La funció és contínua en R –{0,4} i és discontínua en X= 0 i X=4
- Ara anem a classificar les discontinuïtats en x=0 i x=4

I) En x=0

- $\nexists f(0)$
- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = Indeter\ \frac{0}{0} \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-4)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)}{(x-4)} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$$
- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = Indeter\ \frac{0}{0} \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-4)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)}{(x-4)} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$$

Per tant és una discontinuïtat evitable

II) En x=4

- $\nexists f(4)$
- $$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = \frac{16+4}{0^-} = -\infty$$
- $$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = \frac{16+4}{0^+} = +\infty$$

Per tant en x=4 hi ha una discontinuïtat asimptòtica

b) Trobeu les asímptotes de la funció i indiqueu quin és l'aspecte de la gràfica al seu voltant.

A l'apartat anterior ja he trobat que la recta X = 4 és una asímptota vertical i que

- quan la $x \to 4^-$ la funció va cap a $-\infty$
- quan la $x \to 4^+$ la funció va cap a $+\infty$

Per mirar si hi ha asímptotes horitzontals hem de calcular els límits quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$
- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x^2-4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

Així dons la recta Y= 1 és una asímptota tant per $x \to -\infty$ com per $x \to +\infty$

c) Calculeu i simplifiqueu al màxim la derivada de la funció.

(0,75·2+1=2,5 punts)

- Podem simplificar abans de derivar i aplicar la regla de derivació de la divisió

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-4x}=\frac{x+1}{x-4}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-4)-(x+1)\cdot 1}{(x-4)^2}=\frac{x-4-x-1}{(x-4)^2}=\frac{-5}{(x-4)^2}$$

- Però si no hem vist la simplificació inicial també és molt fàcil

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-4x}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x^2-4x)-(x^2+x)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-8x^2+x^2-4x-\left(2x^3-4x^2+2x^2-4x\right)}{\left(x^2-4x\right)^2}=\frac{-5x^2}{\left(x^2-4x\right)^2}=\frac{-5x^2}{\left(x(x-4)\right)^2}=$$

$$=\frac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\,(x-4)^2}=\frac{-5}{(x-4)^2}$$

3) Deriveu les funcions següents:

a) $f(x)=\frac{5}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3+\frac{1}{2}x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{5}{4}4x^3+\frac{7}{3}3x^2+\frac{1}{2}=5x^3+7x^2+\frac{1}{2}$

b) $f(x)=\left(x^3+5x^2+1\right)^7 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=7\left(x^3+5x^2+1\right)^6\left(3x^2+10x\right)$

c) $f(x)=6^{4x+5}+x^6+6^6 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=6^{4x+5}\ln(6)\cdot 4+6x^5$

d) $f(x)=\ln\left(8x^3+7x+9\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{24x^2+7}{8x^3+7x+9}$

e) $f(x)=\sin^2 x-\sin\left(2x^2\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2\sin(x)\cos(x)-\cos\left(2x^2\right)\cdot 4x$

f) $f(x)=3x^3\cdot e^{-2x+3} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=9x^2\cdot e^{-2x+3}+3x^3\cdot e^{-2x+3}\cdot(-2)=e^{-2x+3}\left(9x^2-6x^3\right)$

(6 punts)