Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
1MS
Àlgebra i funcions *I*

Nom: **Grup:**

1) Resol les següents equacions:

a) $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$

b) $3^{x+1} = 80$

c) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^{x} + 3 = 0$

d) $\log(x-16) + 2 = 2 \log x$

(1+0,5+0,75·2=3 punts)

2) Resol els sistemes següents:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2 \log x - \log y = 5 \\ \log(x y) = 4 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 1 > 3 \\ 1 - 2x \geq -9 \end{array}\right\}$

(1,25+0,75=2 punts)

3) Troba el domini de definició de les funcions següents:

a) $f(x) = 4x^{3} - 4x + 8$

b) $f(x) = \dfrac{3x+9}{x^{3} - 9x^{2}}$

c) $f(x) = \sqrt{3x-9}$

d) $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{2x^{2} + 7x - 4}}$

(2 punts)

4) Representa gràficament la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x < -2 \\ -x^{2}+1 & si \quad -2 \leq x < 1 \\ 4 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

A partir de la gràfica d'aquesta funció, indica quin és el domini i el recorregut.

(1,5 punts)

5) Un grup d'amics ha de pagar una factura de 36 euros. Si fossin dos amics més, cadascun d'ells hauria de pagar 3 euros menys. Quants amics són?

(1,5 punts)

Nom: **Grup:**

1) Resol les següents equacions:

a) $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$

Aïllem una arrel i elevem al quadrat els dos membres, la qual cosa implica que la comprovació de les solucions obtingudes és obligatòria.

$$\sqrt{7+2x} = \sqrt{3+x} - 1 \Rightarrow \left(\sqrt{7+2x}\right)^2 = \left(\sqrt{3+x} - 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7+2x = \left(\sqrt{3+x}\right)^2 - 2\sqrt{3+x} + 1 \Rightarrow 7+2x = 3+x-2\sqrt{3+x} + 1 \Rightarrow$$

Aïllant ara l'altra arrel i elevant de nou al quadrat:

$$2\sqrt{3+x} = -7-2x+3+x+1 \Rightarrow 2\sqrt{3+x} = -x-3 \Rightarrow \left(2\sqrt{3+x}\right)^2 = \left(-(x+3)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(3+x) = x^2+6x+9 \Rightarrow 12+4x = x^2+6x+9 \Rightarrow 0 = x^2+2x-3 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} =1 \\ =-3 \end{cases}$$

I ara comprovant les solucions a l'equació inicial

X=1 és solució? $\sqrt{7+2} - \sqrt{3+1} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3-2 = 1 \Rightarrow$ Sí és solució

X= –3 és solució? $\sqrt{7-6} - \sqrt{3-3} = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1-0 = 1 \Rightarrow$ Sí és solució

Així doncs l'equació té dues solucions: **X= 1 i X= –3**

b) $3^{x+1} = 80$

Apliquem logaritmes als dos membres i aïllem la x

$$3^{x+1} = 80 \Rightarrow \log\left(3^{x+1}\right) = \log 80 \Rightarrow (x+1)\cdot\log 3 = \log 80 \Rightarrow x+1 = \frac{\log 80}{\log 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 80}{\log 3} - 1 \Rightarrow x = 2{,}9887$$

c) $3^{2x+2} - 28\cdot 3^x + 3 = 0$

Si fem un canvi de variable $z = 3^x$ queda una equació de 2n grau en la nova variable, que podem solucionar

$$3^{2x+2} - 28\cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow 3^{2x}\cdot 3^2 - 28\cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2\cdot 3^2 - 28\cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9z^2 - 28z + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4\cdot 9\cdot 3}}{18} \Rightarrow z = \frac{28\pm 26}{18} \Rightarrow z = \begin{cases} =3 \\ =\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

I ara desfent els canvi solucionem les noves equacions:

Si $z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

Si $z = \Rightarrow 3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow X = -2$

Solucions doncs **X = 1** i **X = –2**

d) $\log(x-16) + 2 = 2\log x$

Primer transformem l'equació per tal que quedi que els dos membres siguin logaritmes d'alguna cosa:

$$\log(x-16) + 2 = 2\log x \Rightarrow \log(x-16) + \log 100 = \log\left(x^2\right) \Rightarrow$$

$$\log\left((x-16)\cdot 100\right) = \log\left(x^2\right) \Rightarrow 100x - 1600 = x^2 \Rightarrow 0 = x^2 - 100x + 1600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{100 \pm \sqrt{(-100)^2 - 4\cdot 1600}}{2} \Rightarrow x = \frac{100 \pm 60}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} = 80 \\ = 20 \end{cases}$$

Com és una equació logarítmica cal comprovar les solucions a l'equació inicial.

X=80 és solució? $\left.\begin{array}{l} \log(80-16) + 2 = \log(64) + 2 = 3.8062 \\ 2\log 80 = 3.8062 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sí és solució

X=20 és solució? $\left.\begin{array}{l} \log(20-16) + 2 = \log(4) + 2 = 2,6021 \\ 2\log 20 = 2,6021 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sí és solució

Així doncs l'equació té dues solucions: X= 80 i X= 20

(1+0,5+0,75·2=3 punts)

2) Resol els sistemes següents:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2\log x - \log y = 5 \\ \log(x\,y) = 4 \end{array}\right\}$

Primer treballem cada equació per tal de treure els logaritmes:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\log x - \log y = 5 \\ \log(x\,y) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \log\left(x^2\right) - \log y = 5 \\ x\cdot y = 10^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \log\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = 5 \\ x\cdot y = 10^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{y} = 10^5 \\ x\cdot y = 10^4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

I ara aquest sistema de 2n grau el solucionem per substitució:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{y} = 10^5 \\ x\cdot y = 10^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \\ y = \dfrac{10^4}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2\cdot\frac{x}{10^4} = 10^5 \Rightarrow x^3 = 10^5\cdot 10^4 \Rightarrow x^3 = 10^9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{10^9} \Rightarrow x = 10^3$$

I si X=1000 aleshores $y = \dfrac{10000}{1000} = 10$

Com és una equació logarítmica cal comprovar la solució al sistema inicial:

X=1000 i Y=10 és solució? $\left\{\begin{array}{l} 2\log 1000 - \log 10 = 2\cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ \log\left(10^3 10\right) = \log\left(10^4\right) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sí és solució

b) $\left.\begin{array}{r} x + 1 > 3 \\ 1 - 2x \geq -9 \end{array}\right\}$ Solucionem 1r cada inequació i fem la intersecció de les solucions:

1a) $x + 1 > 3 \Rightarrow x > 3 - 1 \Rightarrow x > 2$

2a) $1 - 2x \geq -9 \Rightarrow -2x \geq -9 - 1 \Rightarrow -2x \geq -10 \Rightarrow x \leq \dfrac{-10}{-2} \Rightarrow x \leq 5$

Així doncs ara fent la intersecció de les solucions de cada inequació tenim X>2 i X≤5⇒ $x \in (2,5]$

(1,25+0,75=2 punts)

3) Troba el domini de definició de les funcions següents:

a) $f(x)=4x^3-4x+8$

c) $f(x)=\sqrt{3x-9}$

b) $f(x)=\dfrac{3x+9}{x^3-9x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt{2x^2+7x-4}}$

a) $f(x)=4x^3-4x+8 \Rightarrow$ Domini (f)= R

b) $f(x)=\dfrac{3x+9}{x^3-9x^2} \Rightarrow$ cal que $x^3-9x^2 \neq 0$ així doncs només cal que mirem quan dóna zero i aquests seran els punts que no són del domini $\Rightarrow$

$$x^3-9x^2=0 \Rightarrow x^2(x-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases}$$

Domini (f)= $R-\{0,9\}=(-\infty,0)\cup(0,9)\cup(9,+\infty)$

c) $f(x)=\sqrt{3x-9} \Rightarrow$ cal que $3x-9\geq 0 \Rightarrow 3x\geq 9 \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow$ Domini (f)=[3, +∞)

d) $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt{2x^2+7x-4}} \Rightarrow$ cal que $2x^2+7x-4>0$

per solucionar aquesta inequació dibuixem de forma ràpida la paràbola

$y=2x^2+7x-4$ sabent que

- Té branques cap a dalt ja que a=2>0
- Talla a l'eix OX (y=0) en els punts (–4,0) i (1/2,0)

$$2x^2+7x-4=0 \Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{4} \Rightarrow x=\frac{-7\pm 9}{4} \Rightarrow x=\begin{cases} =\dfrac{1}{2} \\ =-4 \end{cases}$$

Així doncs les solucions de $2x^2+7x-4>0$ són $x\in(-\infty,-4)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ i el

Domini (f)= $(-\infty,-4)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

(2 punts)

4) Representa gràficament la funció següent:

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & si & x<-2 \\ -x^2+1 & si & -2\leq x<1 \\ 4 & si & x>1 \end{cases}$$

A partir de la gràfica d'aquesta funció, indica quin és el domini i el recorregut.

(1,5 punts)

Només cal representar cada tros.

El 1r és una recta i per tant amb en punt en tindrem prou, donarem 3 per assegurar-nos

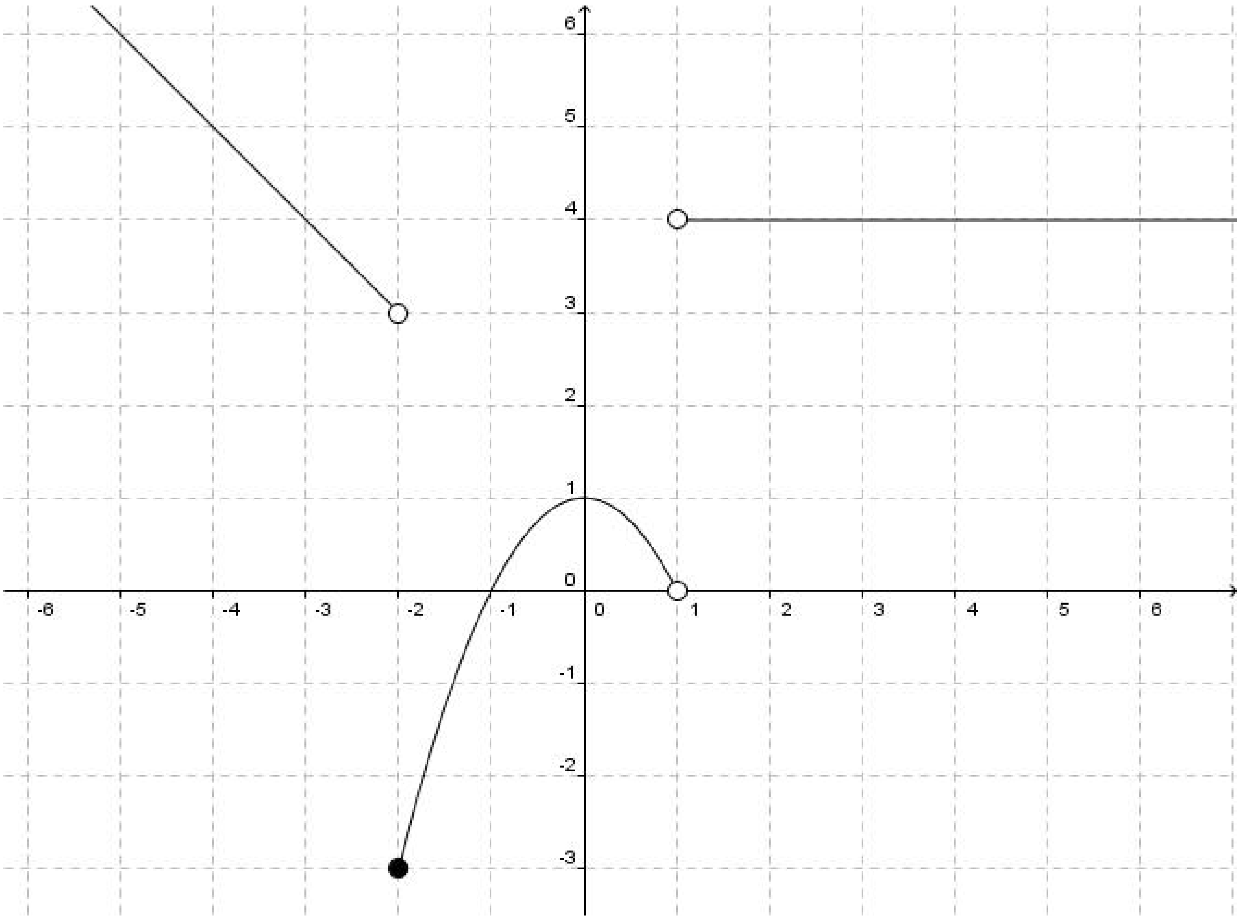
X	Y= – X + 1
– 5	– 4
– 4	– 3
– 3	– 2

La 2a és una paràbola amb branques cap a baix. Que té el vèrtex en el punt de coordenada X= –b/2a=0 així doncs fent la taula de valors al voltant d'aquest vèrtex tenim

X	**Y=** $-x^2+1$
–2	– 4 + 1 = – 3
–1	– 1 + 1 = 0
0	1 (és el vèrtex)
1	– 1 + 1 = 0
2	– 4 + 1 = – 3

La 3a és un tros d'una recta horitzontal, la recta Y=4

Així doncs la gràfica és:



I a la vista de la gràfica podem contestar ràpidament quin és el seu domini i recorregut (=imatge):

Domini (f)= $R-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Recorregut (f)= Imatge (f) = $[-3,1]\cup(3,+\infty)$

5) Un grup d'amics ha de pagar una factura de 36 euros. Si fossin dos amics més, cadascun d'ells hauria de pagar 3 euros menys. Quants amics són?

(1,5 punts)

Anomem X= el número d'amics i Y els euros que paga cadascú.
Ara traduint l'enunciat a equacions queda el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y = 36 \\ (x+2)(y-3) = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\cdot y = 36 \\ xy - 3x + 2y - 6 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = \dfrac{36}{x} \\ xy - 3x + 2y = 42 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{36}{x} - 3x + 2\frac{36}{x} = 42 \Rightarrow 36 - 3x + \frac{72}{x} = 42 \Rightarrow 36x - 3x^2 + \frac{72\cancel{x}}{\cancel{x}} = 42x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 6x - 72 \Rightarrow 0 = x^2 + 2x - 24 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} = 4 \\ = -6 \end{cases}$$

Com un nombre negatiu d'amics no pot ser la solució –6 no val.
Així doncs són 4 amics i cadascú paga 36/4=9 €