

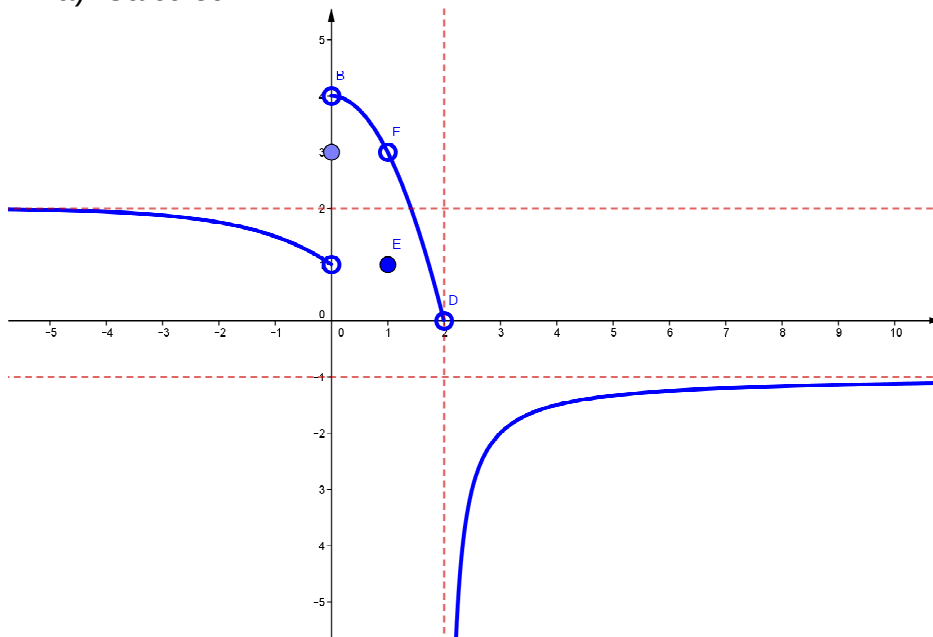


Nom: _____

Grup: _____

1) Considera la gràfica de la funció $f(x)$.

a) Calculeu:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$f(0) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$f(1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$f(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

b) Indica el seu domini, el seu recorregut, en quins punts $f(x)$ no és contínua indicant el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1,4+0,25+0,25+0,6+0,5 = 3 punts)

2) Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} ax + 4 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Trobeu els valors dels paràmetres "a" i "b" per tal que la funció sigui contínua a tot $\mathbb{R}$

b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors a=1 i b=4

(1,5 punts)

3) Calculeu els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 + x - 12} =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 3x}{-x^3 + x + 7} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{8} \right)^{2-x} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \log(3x^2 + 25) =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^5 - 2015x^4}{-3x^5 + 7x} =$$

(1+0,5*4=3 punts)

4) Donada la funció $g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x}$

a) Trobeu el domini, estudeu la continuïtat d'aquesta funció i indiqueu de quin tipus són les discontinuïtats que presenta.

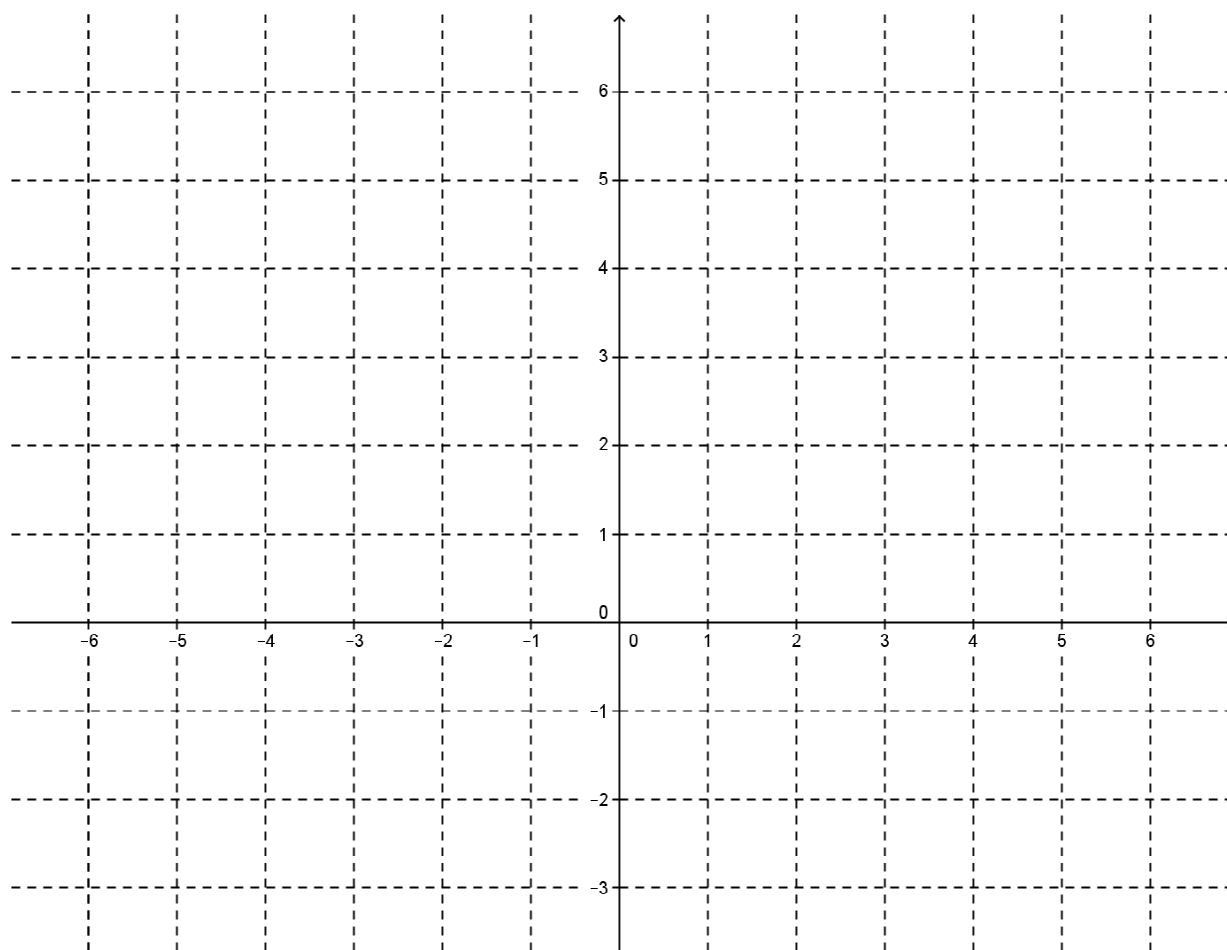
b) Trobeu les asímptotes de la funció i indiqueu quin és l'aspecte de la gràfica al seu voltant.

(0,75+1,75=2,5 punts)



Nom: _____

Grup: _____



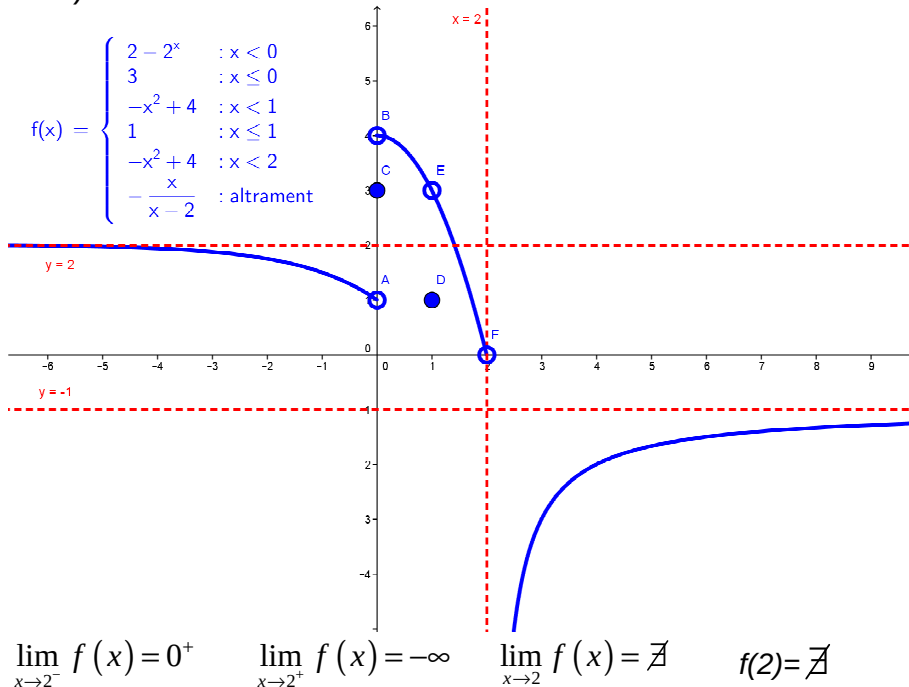


Nom:

Grup:

1) Considera la gràfica de la funció $f(x)$.

a) Calculeu:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \nexists$$

$$f(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$f(1) = 1$$

b) Indica el seu domini, el seu recorregut, en quins punts $f(x)$ no és contínua indicant el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asymptotes que presenta.

(1,4+0,25+0,25+0,6+0,5 = 3 punts)

$$\text{Domini } (f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{Imatge } (f) = \text{Recorregut } (f) = (-\infty, -1) \cup (0, 4)$$

Discontinuitats en:

- $x=0$ de salt
- $x=1$ evitable
- $x=2$ asimptòtica

Si voleu saber quina és l'expressió analítica de la funció obriu el fitxer GeoGebra corresponent i mireu la fórmula introduïda al CAS:

$$f(x) := \text{Si}[x < 0, 2 - 2^x, x \leq 0, 3, x < 1, -x^2 + 4, x \leq 1, 1, x < 2, -x^2 + 4, (-x) / (x - 2)]$$

Asímtotes horitzontal dues.

Per $x \rightarrow -\infty$ la recta $y=2$

Per $x \rightarrow +\infty$ la recta $y=-1$

Asímtota vertical la recta $x=2$ però només es asímtota quan $x \rightarrow 2^+$ ja que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0^+ \text{ i } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$



Nom:

Grup:

2) Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} ax+4 & \text{si } x < 0 \\ -x^2+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-4x+b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Trobeu els valors dels paràmetres "a" i "b" per tal que la funció sigui contínua a tot

② a) Com les fórmules dels tres són funcions elementals podem assegurar que $f(x)$ és CONTÍNUA en els tres oberts del domini de cada tros. És a dir, és clarament contínua $\forall x \in$

$$(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

Ara imposarem que sigui contínua en

a.1) $x=0 \Rightarrow$ Han de ser iguals

$$f(0) = -0^2 + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax + 4 = a \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 + 4 = 4$$

$\Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow$ És CONTÍNUA en $x=0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

a.2) $x=2 \Rightarrow$ Han de ser iguals

$$f(2) = -2^2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 4x + b = 4 - 8 + b = b - 4$$

$$\Rightarrow b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ és CONT en } x=2 \Leftrightarrow b=4$$

CONCLUSIÓ $f(x)$ és CONTÍNUA $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} \text{ i } b=4$



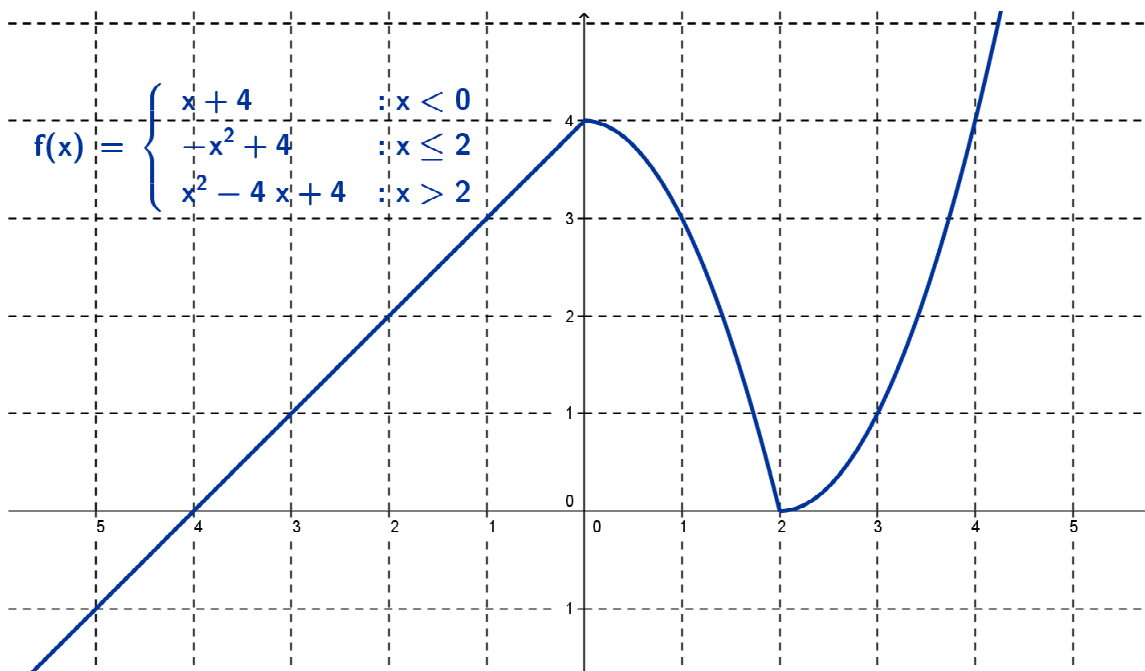
Nom:

Grup:

b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de $a=1$ i $b=4$

(1,5 punts)

Una semirecta i dos trossos de paràboles (una amb branques cap a baix i altra amb branques cap a dalt)



Si mireu el fitxer GeoGebra adjunt observareu la funció i podreu modificar els paràmetres.

parametres:

RETA
 $y = x + 4$

x	y
-4	0
-2	2
0	4

PARÀBOLA
 $y = -x^2 + 4$

- amb Branques Cap a Baix ja que $a = -1 < 0$
- vertex en $x = \frac{-b}{2a} = 0$

x	y
0	4 VÈRTEX
1	3
2	0

PARÀBOLA
 $y = x^2 - 4x + 4$

- amb Branques cap a dalt ja que $a = 1 > 0$
- vertex en $x = \frac{-b}{2a} = 2$

x	y
2	0 VÈRTEX
3	$9 - 12 + 4 = 1$
4	$16 - 16 + 4 = 4$



Nom: _____

Grup: _____

3) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 + x - 12} =$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 3x}{-x^3 + x + 7} =$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{2-x} =$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \log(3x^2 + 25) =$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^5 - 2015x^4}{-3x^5 + 7x} =$

(1+0,5*4=3 punts)

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 + x - 12} = \frac{0}{27 - 18 + 3 - 12} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$
 indeterminat que podem solucionar
 (el SIMPLIFICAR el (x-3) del numerador i denomi.)
 $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
 $x^3 - 2x^2 + x - 12 = (x-3)(x^2 + x + 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ & & 3 & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(x^2 + x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2 + x + 4} = \frac{6}{9+3+4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 3x}{-x^3 + x + 7} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$
 AGAFEN NOMORI DEL MAJOR GRAU
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{2-x} = \left(\frac{5}{8}\right)^{+\infty} = 0^+$
 com $0 < \frac{5}{8} < 1$
 d) $\lim_{x \rightarrow 5} \log(3x^2 + 25) = \log(3 \cdot 25 + 25) = \log(100) = 2$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^5 - 2015x^4}{-3x^5 + 7x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3}{-3x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^2} = -4$
 AGAFEN NOMORI & MAJOR GRAU



Nom: _____

Grup: _____

4) Donada la funció $g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x}$

- Trobeu el domini, estudeu la continuïtat d'aquesta funció i indiqueu de quin tipus són les discontinuïtats que presenta.
- Trobeu les asímptotes de la funció i indiqueu quin és l'aspecte de la gràfica al seu voltant.

(0,75+1,75=2,5 punts)

a) DOMINI

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$\Rightarrow \text{DOMINI}(g) = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

CONTINUÏTAT Com és un quocient de polinomis

sabem que és contínua $\forall x \in \text{DOMINI}(g) \Rightarrow$

És CONTÍNUA $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 4\}$

En $x=0$ és DISCONTÍNUA ja que $\nexists f(0)$ però mirarem els límits per veure el tipus de discontinuïtat:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x-4} = \frac{-1}{-4} = 1/4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x(x-4)} = \dots = 1/4$$

$\Rightarrow$ En $x=0$ hi ha UNA DISCONTINUÏTAT evitable ja que $\nexists f(0)$ però $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/4$

En $x=4$ és DISCONTÍNUA ja que $\nexists f(4)$ però mirarem el límit lateral a veure que passa.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \frac{16-4}{0^-} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \frac{16-4}{0^+} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

És DISCONT.
ASÍMPTÒTICA
I aleshores
 $x=4$ és
ASÍMPT. i l'aspecte
al seu voltant és

$\frac{12}{x-4}$

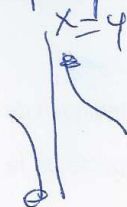


Nom:

Grup:

b) VERTICALS

Ja hem trobat l'asíptota $x=4$ i sabem que la gràfica el seu voltant és



HORIZONTALS

a) $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

Ara fem mètode de l'equivalència

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$\Rightarrow y=1$ és ASÍPTOTA per $x \rightarrow +\infty$

b) $x \rightarrow -\infty$ Idem ja que és un producte de polinomis $\Rightarrow$

$y=1$ és ASÍPTOTA per $x \rightarrow \pm\infty$