

Justifiqueu totes les respostes

1. Esbrineu per a quins valors de x es compleixen les relacions següents:

a) $|2x - 1| \leq 5$

b) $|3x - 2| = x + 10$

2. a) Racionalitzeu: $\frac{2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}}$

b) Simplifiqueu i doneu el resultat en forma de potència: $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}}$

3. Resoleu les equacions següents:

a) $\sqrt{3x+7} + 5 = 3x$

b) $\log(x+9) - \log(3x-2) = 1$

c) $\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{-3}{3x+6}$

d) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

4. L'Elvira signa un contracte de treball en el qual s'hi fixa una pujada del sou del 5% anual. Si comença guanyant 1500€ al mes, quants anys trigarà en guanyar 1800€ mensuals?

5. Per comprar-me aquesta bicicleta elèctrica que val 850 € el Banc VERD m'ofereix un crèdit al 5% a retornar amb pagaments mensuals durant 2 anys. Quina és la quota mensual que he de pagar?

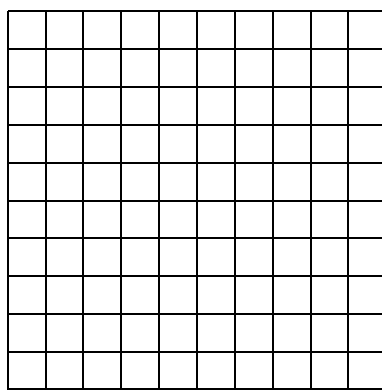
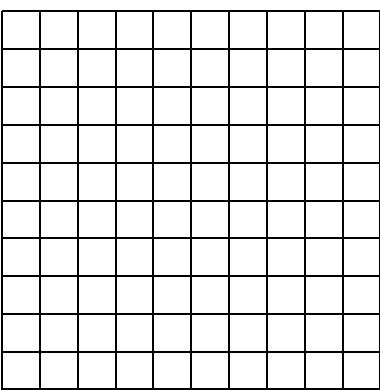
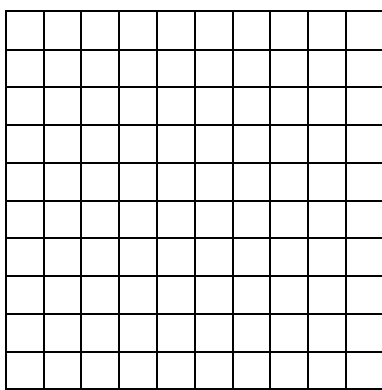
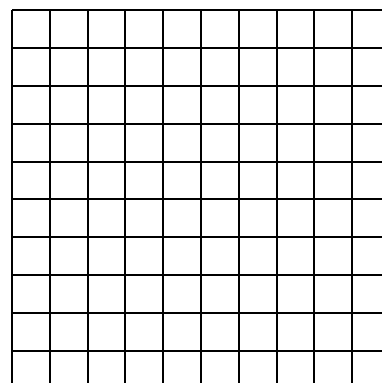
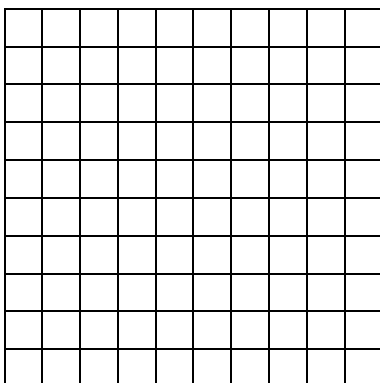
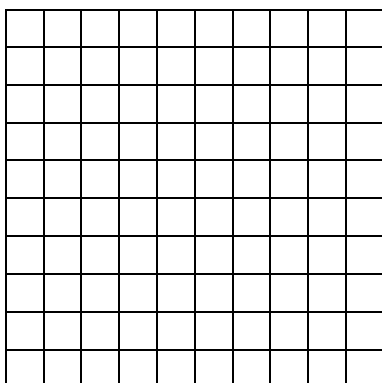


6. Calcula els dominis de les funcions següents:

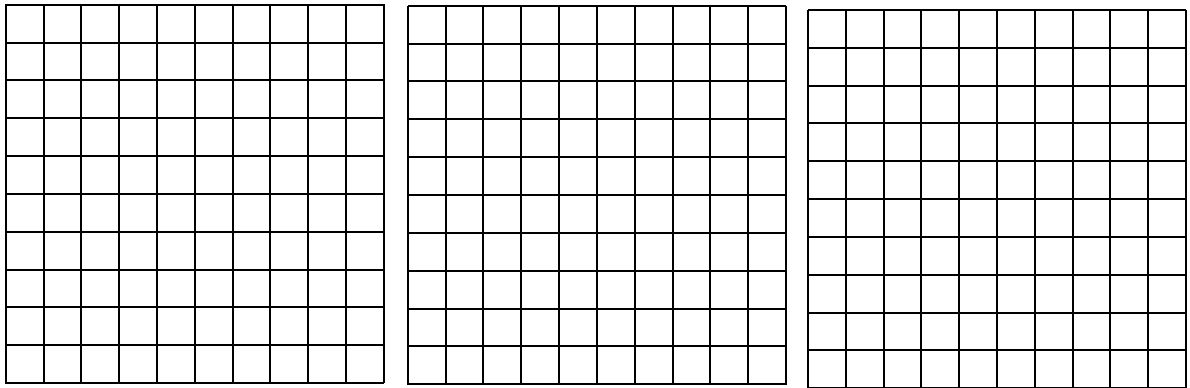
a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

b) $g(x) = \frac{2x-5}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}$

7. a) Representa $f(x) = 2^x$, la seva funció inversa, $y = -f(x)$ i $y = f(-x)$



b) Representeu les funcions $f(x) = \frac{-2}{x}$, $y = |f(x)|$, $y = f(x - 2) - 1$



8. Donada la funció següent,

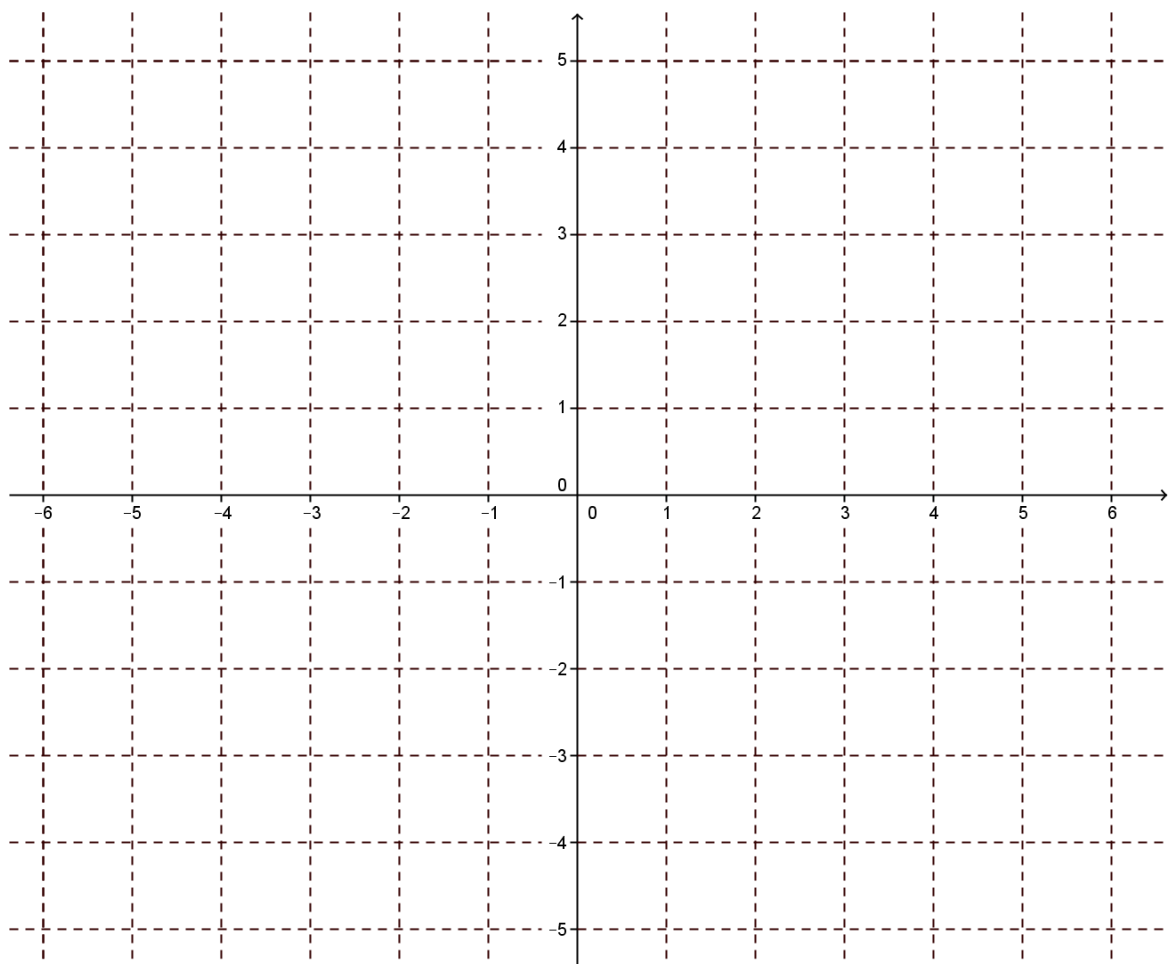
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Feu la gràfica de la funció [Teniu una graella per facilitar el dibuix]

b) Calculeu el domini i el recorregut o imatge de la funció

c) Calculeu les imatges de $x=1$, $x=-1$ i les antiimatges de 0 i 5

Exercici	1	2	3	4	5	6	7	8	TOTAL
Puntuació	1p	1p	2p	1p	1p	1,5p	1p	1,5p	10 punts



SOLUCIÓ:

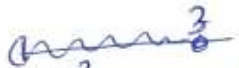
1. Esbrineu per a quins valors de x es compleixen les relacions següents:

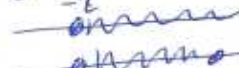
a) $|2x-1| \leq 5$

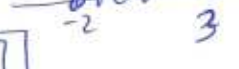
b) $|3x-2| = x+10$

①

a) $|2x-1| \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq 5 \\ 2x-1 \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 1a \text{ INEQ} & 2a \text{ INEQ} \\ 2x \leq 5+1 & 2x \geq -5+1 \\ 2x \leq 6 & 2x \geq -4 \\ x \leq \frac{6}{2} & x \geq \frac{-4}{2} \\ x \leq 3 & x \geq -2 \end{array}$

Solució 1a INEQ 

Solució 2a INEQ 

Solució SISTEMA 

Solució: $x \in [-2, 3]$

b) $|3x-2| = x+10 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 = x+10 \\ 3x-2 = -(x+10) \end{cases}$

$3x-2 = x+10 \Rightarrow 3x-x = 10+2 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} \Rightarrow x = 6$

$3x-2 = -(x+10) \Rightarrow 3x-2 = -x-10 \Rightarrow 3x+x = -10+2 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{4} \Rightarrow x = -2$

Solucions: $x = 6$; $x = -2$

2. a) Racionalitzeu: $\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}$ b) Simplifiqueu i doneu el resultat en forma de potència: $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}}$

②

a) $\frac{2\sqrt{2}}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\sqrt{6}}{5^2 - (2\sqrt{6})^2} =$

$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 4 \cdot 2\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}} = \left(\frac{2^{1/2}}{(2^{-3})^{1/2}} \right)^{1/4} = \left(\frac{2^{1/2}}{2^{-3/2}} \right)^{1/4} = \left(2^{11/6} \right)^{1/4} = 2^{11/24}$

$\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6}$

3. Resoleu les equacions següents:

a) $\sqrt{3x+7} + 5 = 3x$

b) $\log(x+9) - \log(3x-2) = 1$

c) $\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{-3}{3x+6}$

d) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

③

a) $\sqrt{3x+7} + 5 = 3x$

$\sqrt{3x+7} = 3x-5$

Elevo al quadrat els dos membres $\Rightarrow$ CONPROVACIÓ
OBLIGATÒRIA

$(\sqrt{3x+7})^2 = (3x-5)^2$

$3x+7 = 9x^2 - 30x + 25$

$0 = 9x^2 - 33x + 18$

$0 = 3x^2 - 11x + 6 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{11 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$

CONPROVACIÓ

• $x=3$ és solució?

$\sqrt{9+7} + 5 = 3 \cdot 3$

$\sqrt{16} + 5 = 9$

$4 + 5 = 9$

SÍ

• $x = \frac{2}{3}$ és solució?

$\sqrt{3 \cdot \frac{2}{3} + 7} + 5 = 3 \cdot \frac{2}{3}$

$\sqrt{9} + 5 = 2$

$3 + 5 = 2$

NO

$\Rightarrow$ UNA ÚNICA SOLUCIÓ

$x=3$

$$b) \log(x+9) - \log(3x-2) = 1$$

$$\log\left(\frac{x+9}{3x-2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+9}{3x-2} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+9 = 10(3x-2)$$

$$x+9 = 30x-20$$

$$x-30x = -20-9$$

$$-29x = -29$$

$$x = \frac{-29}{-29}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

COMPROVAMOS

$x=1$ é Solução? $\lg(10) - \lg(1) = 1$?
 $2 - 1 = 1$ Sim

Solução $x=1$

$$c) \frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{-3}{3x+6}$$

$$x+2 = x+2$$

$$2x+4 = 2(x+2)$$

$$3x+6 = 3(x+2)$$

$\Rightarrow$ MCM dos denominadores $= 2 \cdot 3(x+2)$

$$\frac{2 \cdot 3 \cancel{(x+2)} \frac{1}{1} (x^2-1)}{\cancel{(x+2)} \frac{1}{1}} - \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cancel{(x+2)} \frac{1}{1} (x+1)}{\frac{2}{1} \cancel{(x+2)} \frac{1}{1}} = \frac{-3}{3} \frac{2 \cdot \cancel{3} \frac{1}{1} \cancel{(x+2)}}{\cancel{3} \frac{1}{1}}$$

$$6(x^2-1) - 3(x+1) = -6$$

$$6x^2-6-3x-3 = -6$$

$$6x^2-3x-3 = 0$$

$$2x^2-x-1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Solutions $x=1$; $x=-\frac{1}{2}$

$$d) \quad 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$$

$$(3^2)^x - 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 81 = 0$$

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot 3^x + 81 = 0$$

CANVI de Variable $z = 3^x$

$$z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$z = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9$$

Així doncs ara després el canvi

$$\text{Si } z = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

4. L'Elvira signa un contracte de treball en el qual s'hi fixa una pujada del sou del 5% anual. Si comença guanyant 1500€ al mes, quants anys trigarà en guanyar 1800€ mensuals?

④ AL PASSAR n ANYS el seu sou serà de $C_i (1+i)^n$ € mensuals

$$\text{on } \left. \begin{array}{l} C_i = 1500 \text{ €} \\ i = 5\% = 0,05 \end{array} \right\} \Rightarrow C_F = 1500 \cdot (1,05)^n$$

$$\text{Si el } C_F \text{ ha de ser } 1800 \text{ €} \Rightarrow$$

$$1800 = 1500 (1,05)^n$$

$$\frac{1800}{1500} = 1,05^n$$

$$1,2 = 1,05^n \Rightarrow$$

$$\log(1,2) = \log[(1,05)^n]$$

$$\log(1,2) = n \log(1,05)$$

$$\frac{\log(1,2)}{\log(1,05)} = n$$

Ham de posar
4 ANYS per a
que començem de
1800 €

$$\approx 3,74 \text{ ANYS}$$

5. Per comprar-me aquesta bicicleta elèctrica que val 850 € el Banc VERD m'ofereix un crèdit al 5% a retornar amb pagaments mensuals durant 2 anys. Quina és la quota mensual que he de pagar?

⑤ ÉS D'UNA AMORTITZACIÓ

$$C = 850 \text{ €}$$

INTERÈS ANUAL = 5%

PERIODICITAT dels pagaments MENSUALS

2 ANYS $\Rightarrow n = 24$ MESOS (24 pagaments)

$$\Rightarrow i = \frac{5\%}{12}$$

$$i = 0,0041\bar{6}$$

$$\Rightarrow (1+i) = 1,0041\bar{6}$$

AIXÍ DONCS la quota d'amortització en

$$a = \frac{C (1+i)^{24} \cdot i}{(1+i)^{24} - 1} = \frac{850 (1,0041\bar{6})^{24} \cdot 0,0041\bar{6}}{(1,0041\bar{6})^{24} - 1} =$$

$$= 37,29 \text{ € cada mes}$$

SOLUCIÓ Hem de pagar 37,29 € mensuals

6. Calcula els dominis de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

b) $g(x) = \frac{2x-5}{3x^3 - 4x^2 - 5x+2}$

⑥ a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

DONANT: cal que $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$

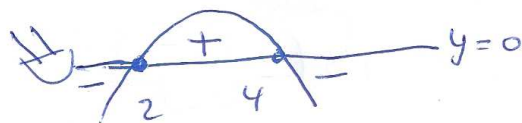
Per solucionar aquesta inequació cal dibuixar de forma ràpida la paràbola $y = -x^2 + 6x - 8$

- Paràbola amb branques cap a baix $a = -1 \nabla$

- Talls amb $y = 0$

$$y = -x^2 + 6x - 8 \quad \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 6x - 8 = 0 \\ x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \end{array} \right.$$

$$x = \begin{cases} \frac{-4}{-2} = 2 \\ \frac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ SOLUCIÓ INEQUACIÓ que és el DOMINI de $f(x)$

$$\forall x \in [2, 4]$$

$$b) \quad g(x) = \frac{2x-5}{3x^3-4x^2-5x+2}$$

Cal assegurar-se que el denominador no s'anul·la
així doncs mirem quan

$$3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$$

Per solucionar aquesta equació descompondrem el
polinomi $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ en factors.

Mirem si és divisible per $x-a$ on a divideix el
terme independent 2 $\Rightarrow a = \pm 1, \pm 2$

Pel Teorema del Residu sabem que el Residu
de la divisió de $P(x)$ per $x-a$ és $P(a)$

així doncs com

$$P(1) = 3 - 4 - 5 + 2 \neq 0 \Rightarrow \text{No agafem } a = 1$$

$$P(2) = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 24 - 16 - 10 + 2 = 0$$

$\Rightarrow a = 2$ si que va bé

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -4 & -5 & 2 \\ & & 6 & 4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$P(x) = (x-2)(3x^2+2x-1)$$

Com és de 2n grau
Busco els seus zeros.

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

$$P(x) = (x-2)3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)$$

I l'equació a resoldre és

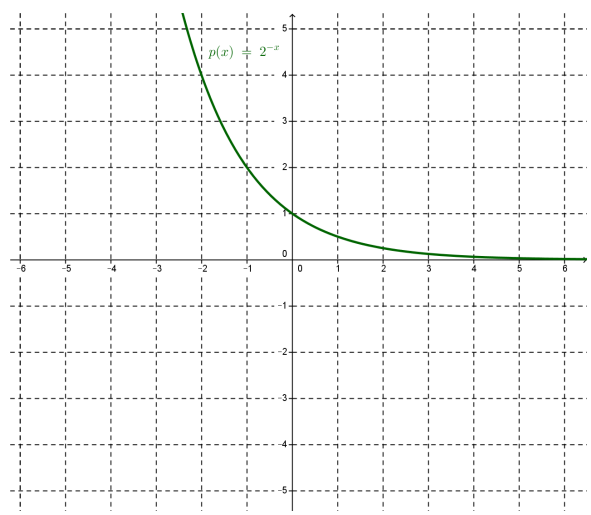
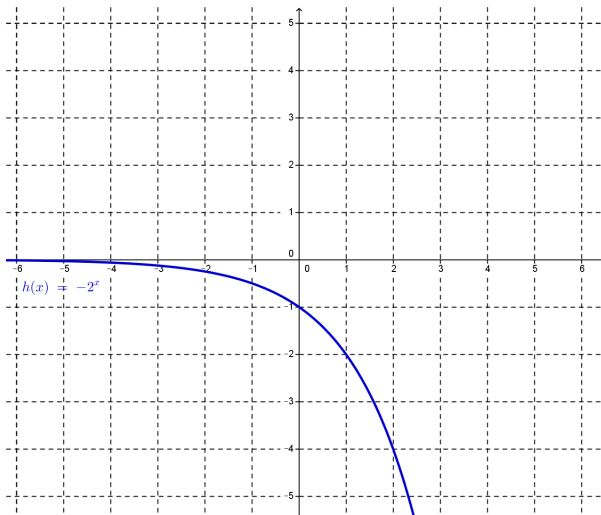
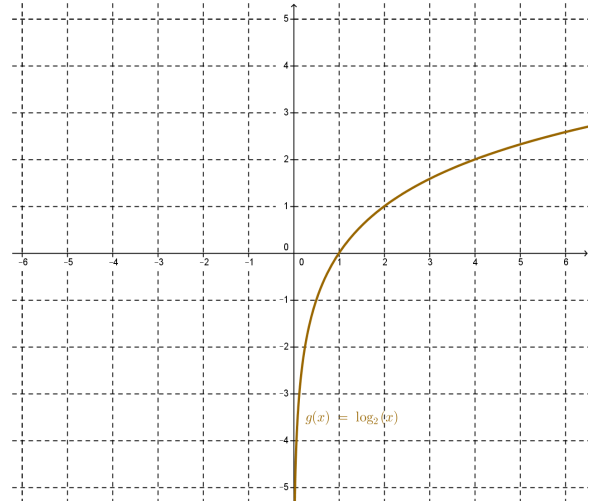
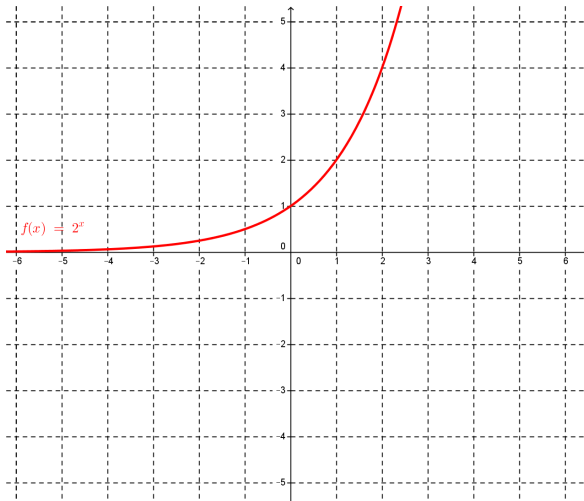
$$(x-2)3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 3=0 \text{ No} \\ x-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

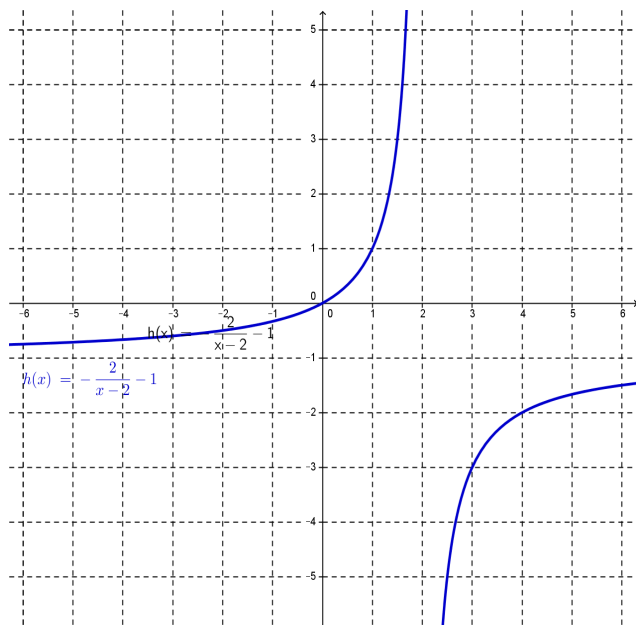
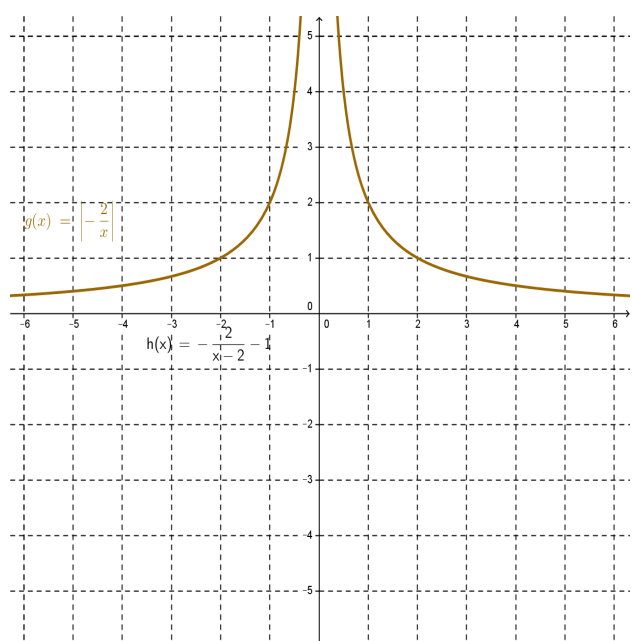
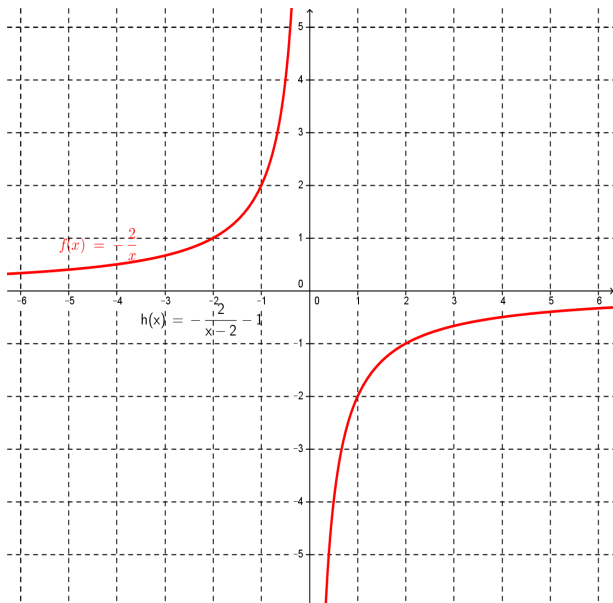
$$\Rightarrow \text{DOMINI}(g) =$$

$$= \mathbb{R} - \left\{ -1, \frac{1}{3}, 2 \right\}$$

7. a) Representa $f(x) = 2^x$, la seva funció inversa, $y = -f(x)$ i $y = f(-x)$



b) Representeu les funcions $f(x) = \frac{-2}{x}$, $y = |f(x)|$, $y = f(x-2) - 1$



8. Donada la funció següent,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

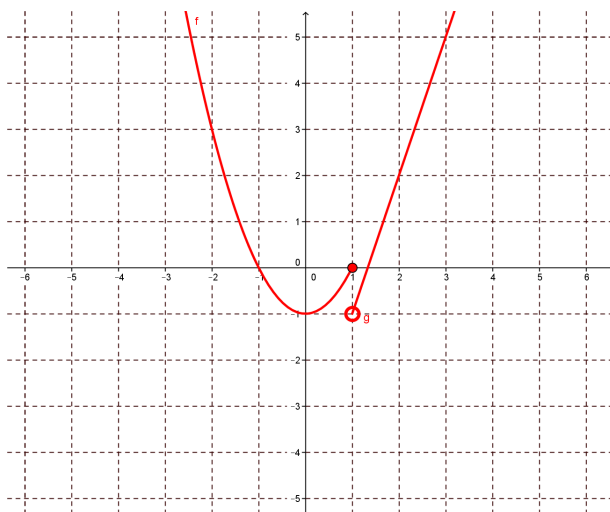
a) Feu la gràfica de la funció [Teniu una graella per facilitar el dibuix]

b) Calculeu el domini i el recorregut o imatge de la funció

c) Calculeu les imatges de $x=1$, $x=-1$ i les antiimatges de 0 i 5

a) La 1^a part és un tros de paràbola que té branques cap a dalt (ja que $a>0$). Amb uns quants punts la tenim dibuixada ràpidament. Per exemple vèrtex (0,-1), (-1,0), (1,0) i (-2,3)

La 2^a part és una semirecta que passa pels punts (1,-1) {punt que no és la gràfica}, (2,2) i (3,5)



b) El domini és molt fàcil de deduir a units els dominis dels trossos o projectant la gràfica sobre l'eix OX. DOMINI (f) = $\mathbb{R}$

La imatge és molt fàcil projectant la gràfica sobre l'eix OY. IMATGE (f) = $[-1, \infty)$

c) A partir de l'expressió algebraica o la gràfica és molt fàcil trobar les imatges demanades:

$$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

I les antiimatges a partir de gràfica s'observa:

- que els 0 té tres antiimatges: -1, 1 i un número que està entre el 1 i 2 i que descobrim amb la fórmula del 2ⁿ tros: $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$. Així doncs

$$f^{-1}(0) = \left\{ -1, 1, \frac{4}{3} \right\}$$

- que el 5 té dues antiimatges: de la paràbola un valor que està entre -3 i -2 i de la semirecta és el

per descobrir el 1^r operem: $x^2 - 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6} \Rightarrow x = -\sqrt{6}$ ens quedem només amb la solució negativa

$$\text{Així doncs } f^{-1}(5) = \left\{ -\sqrt{6}, 3 \right\}$$