

Nom, Cognoms i Grup:

Justifiqueu totes les respostes

1. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2x^2 + kx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuïtat en $x = -1$

b) Troba el valor de k perquè la funció sigui contínua en $x = 1$

2. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x + 2}$$

$$g(x) = \cos^2(e^x - 2)$$

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$k(x) = 3^{4x^2 - 3x + 2}$$

3. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

a) Calcula el domini i estudia les simetries de la funció

b) Calcula les asímptotes i l'aspecte de la gràfica al seu voltant

c) Estudia els creixement de la funció i els extrems relatius.

d)

Dibuixa la funció

4. Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = x^2 - 4x + 3$ que és paral·lela a la recta $y = 2x$

5. Calcula els límits següents:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,3)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 - x}{x^4 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 15}{x^2 - 3}$$

6. Les notes de l'avaluació final de 1r de BTX de les assignatures 1LC (català) i 1LA (llatí) d'una mostra representativa d'alumnes del curs 2013-2014 van ser:

X_i = Nota de 1LC	10	4	5	6	3	3	5	6
Y_i = Nota de 1LA	9	5	7	8	4	4	5	8

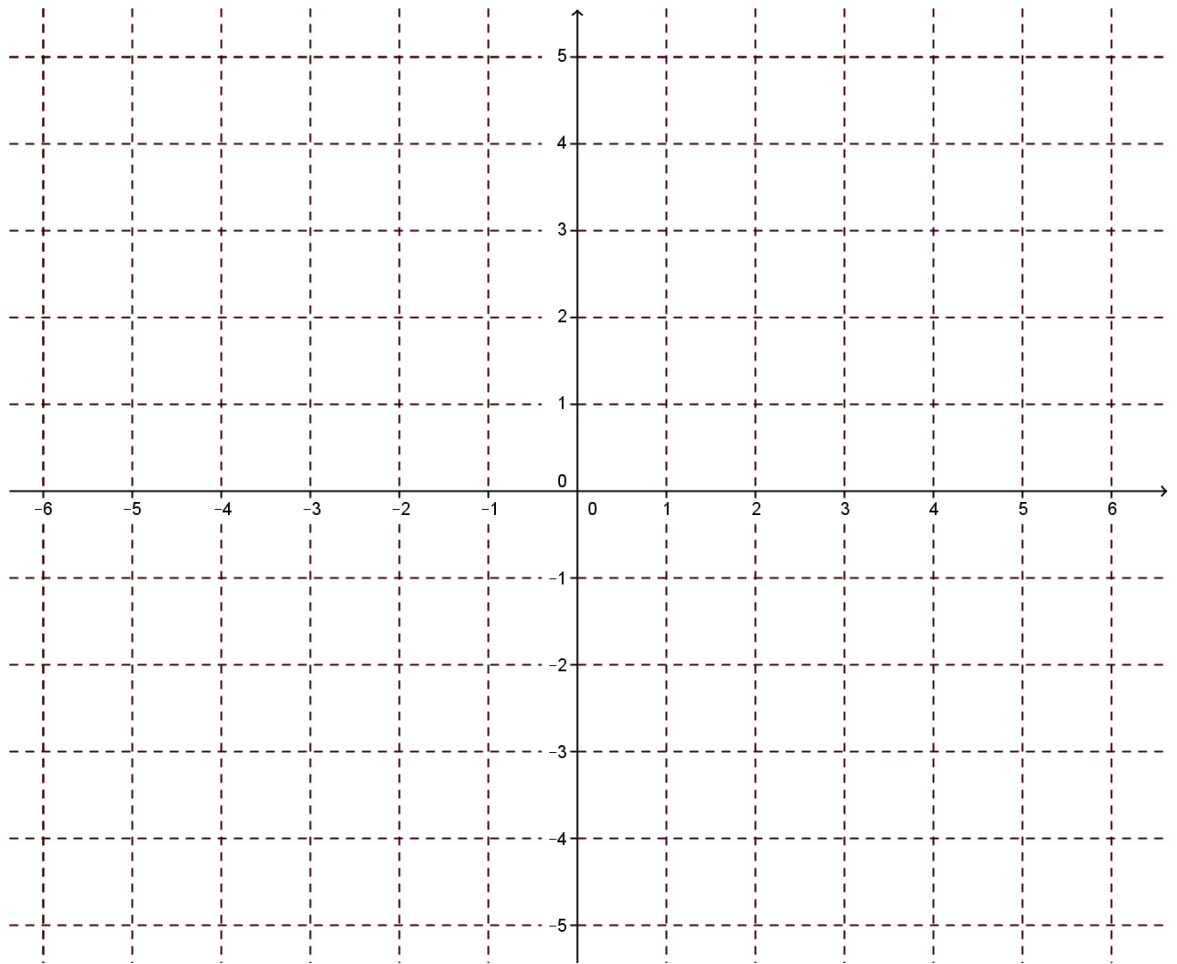
Calculeu:

- a) De cada variable la mitjana aritmètica i la desviació tipus.
- b) La covariància de les dues variables i el coeficient de correlació lineal. Interpreta el resultat obtingut.

Si fem la hipòtesi que aquest curs les coses seran semblants a les del curs anterior.

- c) Un alumne que traurà un 7 en català, quina és la nota que pot esperar obtenir en llatí?. Explica quina recta de regressió has fet servir i escriu la seva equació. És fiable aquest resultat?
- d) Un alumne que traurà un 6 en llatí, quina és la nota que pot esperar obtenir en català?. Explica quina recta de regressió has fet servir i escriu la seva equació. És fiable aquest resultat?

Exercici	1	2	3	4	5	6	TOTAL
Puntuació global	1	2	3	0,75	1,75	1,5	10
Desglosament	1	2	0,4+1,1+1+0,5	0,75	1+0,25+0,25+0,25	0,4+0,3+0,4+0,4	10



$$1. \text{ Donada la funció } f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2x^2 + kx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudia la continuïtat en $x = -1$

Comprovem si es compleix la condició de continuïtat en $x = -1$: $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$f(-1) = -1+1=0; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0 \rightarrow \text{els tres valors no coincideixen, la funció té}$$

una discontinuïtat de salt finit

b) Troba el valor de k perquè la funció sigui contínua en $x = 1$

Obliguem a que es compleixi la condició de continuïtat en $x = 1$: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 =$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} -2x^2 + kx$$

$$f(1) = -2+k; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} -2x^2 + kx = -2+k \rightarrow -2+k=2 \rightarrow k=4$$

2. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x + 2} \qquad f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 2}}$$

$$g(x) = \cos^2(e^x - 2) \\ g'(x) = 2 \cos(e^x - 2) (-\sin(e^x - 2)) \cdot e^x = -2e^x \cos(e^x - 2) \sin(e^x - 2)$$

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2} \qquad h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$k(x) = 3^{4x^2 - 3x + 2} \qquad k'(x) = 3^{4x^2 - 3x + 2} \cdot \ln 3 \cdot (8x - 3)$$

3. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

a) Calcula el domini i estudia les simetries de la funció

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Té simetria parella (respecte l'eix d'ordenades)

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x)$$

b) Calcula les asímptotes i l'aspecte de la gràfica al seu voltant

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{Discontinuitat de salt infinit en } x=-1 \text{ i Asímtota}$$

vertical d'equació $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{Discontinuitat de salt infinit en } x=1 \text{ i Asímtota}$$

vertical d'equació $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow y=1 \quad \text{Equació de l'asímtota horitzontal}$$

c) Estudia els creixement de la funció i els extrems relatiu.

Condicció necessària d' extrem relatiu: $f'(x)=0$; busquem els punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^4} = 0 \rightarrow x=0$$

Intervals de monotonia: $(-\infty, -1)$ $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(1, +\infty)$

$(-\infty, -1)$ $f'(x) > 0$ creix

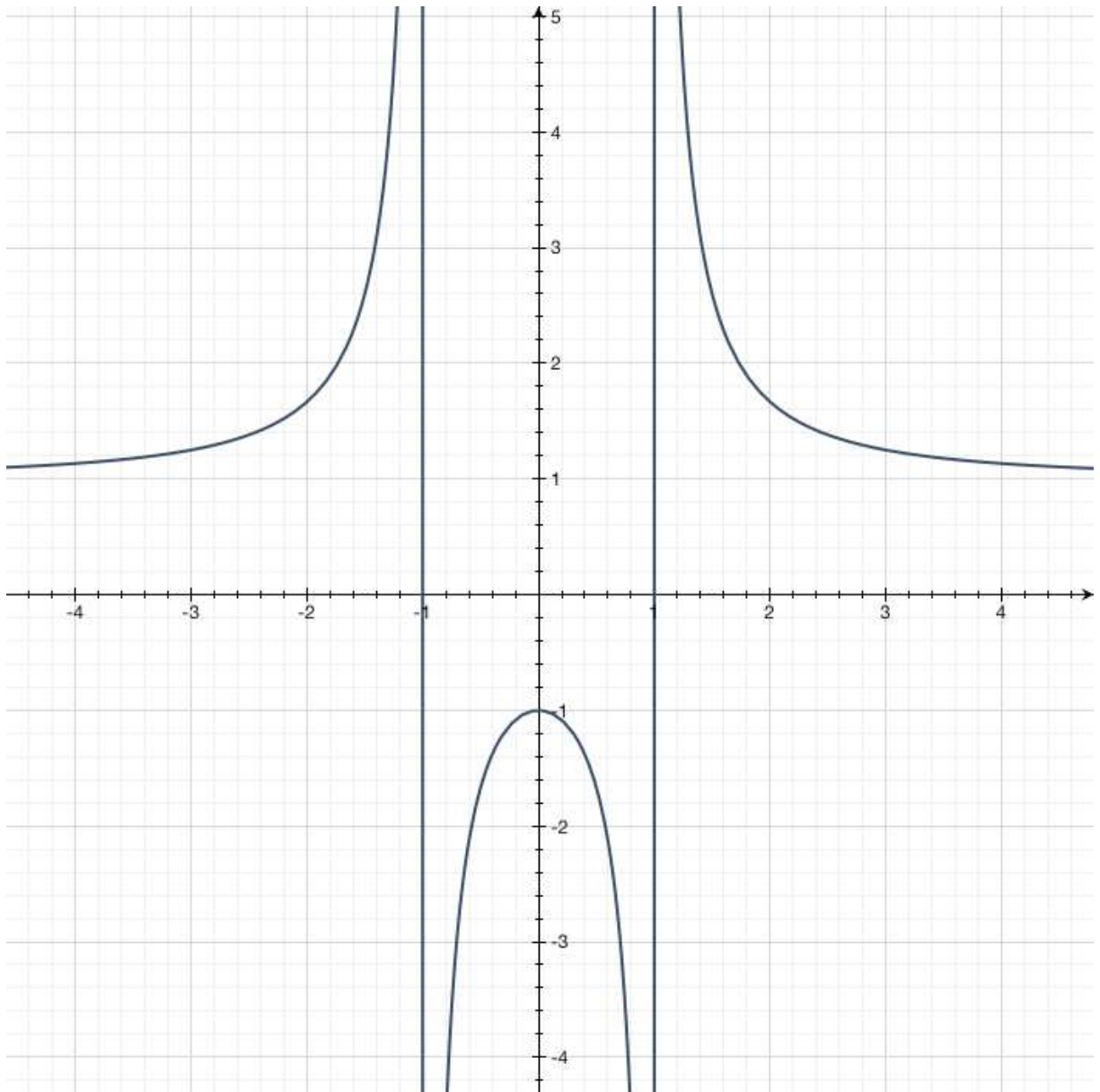
$(-1, 0)$ $f'(x) > 0$ creix

$(0, 1)$ $f'(x) < 0$ decreix

$(1, +\infty)$ $f'(x) < 0$ decreix

Conclusió: en $x=0$ hi ha un màxim relatiu de la funció $(0, -1)$

d) Dibuixa la funció



4. Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = x^2 - 4x + 3$ que és paral·lela a la recta $y = 2x$

$$m=2 \rightarrow f'(x)=2 \rightarrow 2x-4=2 \rightarrow x=3 \rightarrow f(3)=0 \text{ Punt de tangència } (3, 0)$$

$$\text{Equació de la recta tangent } y=2x-6$$

5. Calcula els límits següents:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \frac{0}{0} \text{ indeterminació}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - x - 12)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x - 12)}{(x-4)} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,3)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 - x}{x^4 + x^2} = +\infty \quad (\text{Indeterminació del tipus } \frac{\infty}{\infty}) \quad \text{Grau}(-2x^5 - x) > \text{Grau}(x^4 + x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 15}{x^2 - 3} = \frac{0}{6} = 0$$

6. Les notes de l'avaluació final de 1r de BTX de les assignatures 1LC (català) i 1LA (llatí) d'una mostra representativa d'alumnes del curs 2013-2014 van ser:

X_i = Nota de 1LC	10	4	5	6	3	3	5	6
Y_i = Nota de 1LA	9	5	7	8	4	4	5	8

Calculeu:

a) De cada variable la mitjana aritmètica i la desviació tipus.

b) La covariància de les dues variables i el coeficient de correlació lineal. Interpreta el resultat obtingut.

Si fem la hipòtesi que aquest curs les coses seran semblants a les del curs anterior.

c) Un alumne que traurà un 7 en català, quina és la nota que pot esperar obtenir en llatí?. Explica quina recta de regressió has fet servir i escriu la seva equació. És fiable aquest resultat?

d) Un alumne que traurà un 6 en llatí, quina és la nota que pot esperar obtenir en català?. Explica quina recta de regressió has fet servir i escriu la seva equació. És fiable aquest resultat?

Dades		X	Y
X	Y		
10	9		
4	5		
5	7		
6	8		
3	4		
3	4		
5	5		
6	8		

Mitjana	5,25	6,25
Desv. estàndard	2,10654	1,85405
N. de dades	8	
Covariància	3,4375	
Coef. corr. lineal	0,88014	

Trieu l'opció gràfica

Dues rectes de regressió

Prediccions			
X	Y(X)	Y	X(Y)
7	7,60563	6	5

$y = 0,7746x + 2,1831$ $x = 1,0000y - 1,0000$

Exercici	1	2	3	4	5	6	TOTAL
Puntuació global	1	2	3	0,75	1,75	1,5	10
Desglosament	1	2	0,4+1,1+1+0,5	0,75	1+0,25+0,25+0,25	0,4+0,3+0,4+0,4	10