Nom: **Grup:**

1) La Júlia, la Clara i en Miquel estan repartint propaganda. La Clara reparteix sempre el 20% del total; en Miquel reparteix 100 fulls de propaganda més que la Júlia. I entre la Clara i la Júlia en reparteixen 850 fulls.
   a) Planteja un sistema d'equacions que permeti saber quants fulls reparteix cadascun.
   b) Soluciona els sistema anterior.
   c) Sabent que l'empresa paga 1 cèntim per cada full repartit, calcula els diners que ha rebut cadascun d'ells.

(1+1+0,5=2,5 punts)

2) **[VERSIÓ A**] Es considera el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+7z&=1 \\ 2x+2y-3z&=a \\ 2x+8y+(a-42)z&=2 \end{aligned}\right\}$$

   a) Discuteix els sistema següent segons els valors de "a" i interpreta'ls geomètricament:
   b) Soluciona el sistema en els casos en que sigui compatible

(3+1,5 = 4,5 punts)

2) [VERSIÓ B] Es considera el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+7z&=1 \\ 2x+2y-3z&=a \\ 2x+8y+(a-22)z&=2 \end{aligned}\right\}$$

   a) Discuteix els sistema següent segons els valors de "a" i interpreta'ls geomètricament:
   b) Soluciona el sistema en els casos en que sigui compatible

(2,5+2 = 4,5 punts)

3) Resol l'equació **A · X + B = C** on A, B i C són les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\3&4\end{pmatrix}\ i\ C=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$$

(3 punts)

1) La Júlia, la Clara i en Miquel estan repartint propaganda. La Clara reparteix sempre el 20% del total; en Miquel reparteix 100 fulls de propaganda més que la Júlia. I entre la Clara i la Júlia en reparteixen 850 fulls.
   a) Planteja un sistema d'equacions que permeti saber quants fulls reparteix cadascun.
   b) Soluciona els sistema anterior.
   c) Sabent que l'empresa paga 1 cèntim per cada full repartit, calcula els diners que ha rebut cadascun d'ells.

(1+1+0,5=2,5 punts)

Anomenem:

$x \rightarrow$ nombre de fulls que reparteix la Júlia

$y \rightarrow$ nombre de fulls que reparteix la Clara

$z \rightarrow$ nombre de fulls que reparteix en Miquel

$$\left.\begin{array}{l} y = 0,2(x+y+z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array}\right\}$$

Multiplicant la 1a equació per 10 i passant les incògnites a un membre el sistema queda així

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 8y + 2z = 0 \\ -x + z = 100 \\ x + y = 850 \end{array}\right\}$$

Si el solucionem pel mètode de substitució

Substituïm la 2a equació en la 1a i n'obtenim el sistema següent, que resolem:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0,2(2x+y+100) \\ x + y = 850 \end{array}\right\}$$

$x = 850 - y$

$y = 0,2(1\,700 - y + 100) \rightarrow y = 0,2(1\,800 - y) \rightarrow y = 300$

$x = 850 - y = 850 - 300 = 550 \rightarrow x = 550$

$z = x + 100 = 550 + 100 = 650 \rightarrow z = 650$

La Júlia reparteix 550 fulls; la Clara, 300, i en Miquel, 650.

Si el solucionem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 0 & 850 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F2+F1 \\ F3+2F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 950 \\ 0 & -8 & 4 & 200 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F3+8F2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 950 \\ 0 & 0 & 12 & 7800 \end{array}\right)$$

I ara solucionant a cada equació i substituint a l'anterior tenim:

$$F3 \Rightarrow z = \frac{7800}{12} = 650$$

$F2 \Rightarrow y = 950 - z = 950 - 650 = 300$

$F1 \Rightarrow x = z - 100 = 650 - 100 = 550$

Per tant la Júlia reparteix 550 fulls, la Clara 300 i en Miquel 650 i cobren respectivament 5,5 €, 3 € i 6,5 €.

2) **[VERSIÓ A]** Es considera el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+7z&=1 \\ 2x+2y-3z&=a \\ 2x+8y+(a-42)z&=2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuteix els sistema següent segons els valors de "a" i interpreta'ls geomètricament:
b) Soluciona el sistema en els casos en que sigui compatible

(3+1,5 = 4,5 punts)

Escalonem pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & a \\ 2 & 8 & a-42 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F2-2F1 \\ F3-2F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -17 & a-2 \\ 0 & 12 & a-56 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F3-2F2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -17 & a-2 \\ 0 & 0 & a-22 & -2(a-2) \end{array}\right)$$

I ara ja podem fer la discussió:

CAS I: a $\neq$ 22 és SCD per tant els tres plans (cada equació és un pla de l'espai) es tallen en un únic punt.

CAS II: a=22

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{array}\right)$$ **així doncs mirant la F3 veiem que 0=–40, per tant és un SI.**

Per tant els tres plans (cada equació és un pla de l'espai) no es tallen.

Solució CAS I: a $\neq$ 22 SCD

$$F3 \Rightarrow z = \frac{-2(a-2)}{(a-22)}$$

$$F2 \Rightarrow 6y = a-2+17z \Rightarrow 6y = \Rightarrow y = \frac{a^2-58a+112}{6(a-22)}$$

$$F1 \Rightarrow x = 1+2y-7z \Rightarrow x = \frac{a^2-13a-38}{3(a-22)}$$

2) [VERSIÓ B] Es considera el sistema d'equacions lineals:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+7z&=1\\ 2x+2y-3z&=a\\ 2x+8y+(a-22)z&=2\end{aligned}\right\}$$

a) Discuteix els sistema següent segons els valors de "a" i interpreta'ls geomètricament:
b) Soluciona el sistema en els casos en que sigui compatible

(2,5+2 = 4,5 punts)

Escalonem pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1\\ 2 & 2 & -3 & a\\ 2 & 8 & a-22 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ F2-2F1\\ F3-2F1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1\\ 0 & 6 & -17 & a-2\\ 0 & 12 & a-36 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ F3-2F2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1\\ 0 & 6 & -17 & a-2\\ 0 & 0 & a-2 & -2(a-2)\end{array}\right)$$

I ara ja podem fer la discussió:

CAS I: a $\neq$ 2 és SCD per tant els tres plans (cada equació és un pla de l'espai) es tallen en un únic punt.

CAS II: a=2

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **així doncs podem eliminar la 3a equació i tenim que és un SCI amb un grau de llibertat. Per tant els tres plans es tallen en una recta.**

<u>Solució CAS I: a $\neq$ 2 SCD</u>

$$F3 \Rightarrow z = \frac{-2(a-2)}{(a-2)} = -2$$

$$F2 \Rightarrow 6y = a - 2 + 17z \Rightarrow 6y \Longrightarrow y = \frac{a-36}{6}$$

$$F1 \Rightarrow x = 1 + 2y - 7z \Rightarrow x = 1 + 2\frac{a-36}{6} - 7(-2) \Rightarrow x = \frac{3 + a - 36 + 42}{3} = \frac{a-9}{3}$$

<u>Solució CAS II: a=2 SCI</u> $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **agafem la incògnita z com a lliure i tenim**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1-7z \\ 0 & 0 & 17z \end{array}\right) \forall z \in R$$

$\forall z \in R$

$$6y = 17z \Rightarrow y = \frac{17z}{6}$$

$$x = 1 - 7z + 2y = 1 - 7z + 2\frac{17z}{6} = \frac{3 - 21z + 17z}{3} = \frac{3-4z}{3}$$

3) Resol l'equació **A · X + B = C** on A, B i C són les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\ i\ C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(3 punts)

Començarem per aïllar la X suposant que $\exists A^{-1}$

A · X = C – B $\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(C-B) \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}\cdot(C-B)$

Ara anem a fer els càlculs:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\ i\ \ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ i \Rightarrow C-B=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 3 & 4\\ -4 & -6\end{pmatrix}$$

Ara intentem calcular la inversa de A pel mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) F3-F2 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) F3/(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \begin{matrix}F1-3F3\\ F2-2F3\\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) F1-2F2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \Rightarrow \exists A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

I ara ja només cal operar:

$$X=A^{-1}\cdot(C-B) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 3 & 4\\ -4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -11 & -16\\ 7 & 10\end{pmatrix}$$