Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
1MS
Sistemes d'equacions, determinants i matrius

Nom: **Grup:**

1) El rang de la matriu de coeficients d'un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites és igual a 1.
   a) Quin són els rangs que pot tenir la matriu ampliada?
   b) I com és el sistema en cada cas?
   [Justifiqueu totes les respostes]

(1 punt)

2) Donat el sistema d'equacions lineals i **utilitzant determinants**

$$\left.\begin{array}{r} mx+(m-2)y \qquad\qquad = 2m-1 \\ (m-2)y+3z = m+4 \\ mx \qquad\qquad +3z = m+7 \end{array}\right\}$$

   a) Discuteix el sistema segons els valors del paràmetre "**m**" i interpreta'ls geomètricament:
   b) Soluciona el sistema en els casos en de compatibilitat.

(3+2,5 = 5,5 punts)

3) Donades les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} i\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Digueu quines d'aquestes matrius tenen inversa i, cas de tenir-ne, calculeu-la.
   b) Determineu X perquè es compleixi l'equació **A · X · B = C + 4 · D**

(1,8+1,7 =3,5 punts)

1) El rang de la matriu de coeficients d'un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites és igual a 1.
   a) Quin són els rangs que pot tenir la matriu ampliada?
   b) I com és el sistema en cada cas?
   [Justifiqueu totes les respostes]

(1 punt)

a) Com la matriu ampliada té les mateixes columnes que la matriu de coeficients i una més (la de termes independents) i
el rang d'una matriu és el nombre màxim de columnes linealment independents

Podem dir que $rang(Ampliada) = \begin{cases} = rang(A) \\ = rang(A)+1 \end{cases}$ **i per tant en el nostre cas és 1 o 2**

b) Si Rang(A)=1=Rang(Ampliada) com hi ha 3 incògnites resulta que és un SCI (sistema compatible indeterminat) amb 2 graus de llibertat

Si Rang(A)=1 i Rang(Ampliada)=2 resulta que és un SI (sistema incompatible)

2) Donat el sistema d'equacions lineals i **utilitzant determinants**

$$\left.\begin{aligned} mx+(m-2)y \quad &= 2m-1 \\ (m-2)y+3z &= m+4 \\ mx \qquad\quad +3z &= m+7 \end{aligned}\right\}$$

   a) Discuteix el sistema segons els valors del paràmetre "**m**" i interpreta'ls geomètricament:
   b) Soluciona el sistema en els casos en de compatibilitat.

(3+2,5 = 5,5 punts)

a) Com la matriu de coeficients és quadrada començarem per calcular el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m-2 & 0 \\ 0 & m-2 & 3 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{F1-F3}{=} \begin{vmatrix} 0 & m-2 & -3 \\ 0 & m-2 & 3 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{DesenC1}{=}$$

$$= m\begin{vmatrix} m-2 & -3 \\ m-2 & 3 \end{vmatrix} = m\cdot(m-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = m\cdot(m-2)\cdot 6$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 6\,m\,(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-2=0 \Leftrightarrow m=2 \end{cases}$$

I ara ja podem fer la discussió del sistema:

CAS-I: $m \neq 0$ i $m \neq 2$ resulta que és SCD i per tant podem dir que són 3 plans que es tallen en un únic punt.

CAS-II: m=0 el sistema queda així: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right)$ com

$|A| = 0 \Rightarrow$ rang(A)<3, però com veig un menor d'ordre 2 menor que no és zero:

$M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ rang (A)=2

Ara per calcular el rang de l'ampliada orlem aquest $M_2 \neq 0$ amb la C4 i la F3 i tenim:

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 6 + 24 \neq 0 \Rightarrow$ Rang (Ampliada)=3 i per tant S.I. (sistema incompatible) i per tant podem dir que són 3 plans que no tenen cap punt en comú.

CAS-III: m=2 el sistema queda així: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$ com

$|A| = 0 \Rightarrow$ rang(A)<3, però com veig un menor d'ordre 2 menor que no és zero:

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ rang (A)=2

Ara per calcular el rang de l'ampliada orlem aquest $M_2 \neq 0$ amb la C4 i la F2 i tenim:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 18 - 36 = 0 \Rightarrow$ Rang (Ampliada)=2 i com hi ha 3 incògnites tenim que és un SCI (sistema compatible indeterminat) amb 1 grau de llibertat i per tant podem dir que són 3 plans que es tallen en una recta.

b) CAS-I: m≠ 0 i m≠ 2 que és SCD

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & m-2 & 0 & 2m-1 \\ 0 & m-2 & 3 & m+4 \\ m & 0 & 3 & m+7 \end{array}\right)$$ **i ja sabem que det(A)= 6 m (m–2)**

Per tant trobant les solucions per Cramer tenim que

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2m-1 & m-2 & 0 \\ m+4 & m-2 & 3 \\ m+7 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot(m-2)} \overset{(F1-F2)}{=} \frac{\begin{vmatrix} m-5 & 0 & -3 \\ m+4 & m-2 & 3 \\ m+7 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot(m-2)} \overset{DesC2}{=}$$

$$=\frac{\cancel{(m-2)}\begin{vmatrix} m-5 & -3 \\ m+7 & 3 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot\cancel{(m-2)}}=\frac{3m-15+3m+21}{6m}=\frac{6m+6}{6m}=\frac{6(m+1)}{6m}=\frac{m+1}{m}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m & 2m-1 & 0 \\ 0 & m+4 & 3 \\ m & m+7 & 3 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot(m-2)} \overset{(F1-F3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & m-8 & -3 \\ 0 & m+4 & 3 \\ m & m+7 & 3 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot(m-2)} \overset{DesC1}{=}$$

$$=\frac{\cancel{m}\begin{vmatrix} m-8 & -3 \\ m+4 & 3 \end{vmatrix}}{6\cdot \cancel{m}\cdot(m-2)}=\frac{3m-24+3m+12}{6(m-2)}=\frac{6m-12}{6(m-2)}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & m-2 & 2m-1 \\ 0 & m-2 & m+4 \\ m & 0 & m+7 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot(m-2)} \overset{(F1-F3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & m-2 & m-8 \\ 0 & m-2 & m+4 \\ m & 0 & m+7 \end{vmatrix}}{6\cdot m\cdot(m-2)} \overset{DesC1}{=}$$

$$=\frac{\cancel{m}\begin{vmatrix} m-2 & m-8 \\ m-2 & m+4 \end{vmatrix}}{6\cdot \cancel{m}\cdot(m-2)}=\frac{\cancel{(m-2)}\begin{vmatrix} 1 & m-8 \\ 1 & m+4 \end{vmatrix}}{6\ \cancel{(m-2)}}=\frac{m+4-m+8}{6}=\frac{12}{6}=2$$

CAS-III: m=2 que és SCI amb 1 grau de llibertat Rang(A)=Rang(Ampliada)=2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \text{ i sabem que } M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

Per tant l'equació que no intervé en el menor l'eliminem i la columna de la matriu de coeficients que no intervé en el menor és la incògnita que queda lliure.

Així doncs: $\forall y \in R$ **tenim el següent sistema de 2 equacions i 2 incògnites (x i z)**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = y \quad \forall y \in R \\ z = 2 \end{cases}$$

3) Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Digueu quines d'aquestes matrius tenen inversa i, cas de tenir-ne, calculeu-la.
b) Determineu X perquè es compleixi l'equació **A · X · B = C + 4 · D**

(1,8+1,7 =3,5 punts)

a) Per mirar si tenen inversa només hem de veure si el seu determinant és diferent de zero. Així doncs com

Det(A) = –1 $\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ **Det(B) = 3 – 4= –1** $\neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

Det(C) = 4 – 4= 0 $\Rightarrow \nexists C^{-1}$ **Det(D) = 0** $\Rightarrow \nexists D^{-1}$

I ara calculem les que existeixen

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^T}{|A|} = \frac{\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^T}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{[adj(B)]^T}{|B|} = \frac{\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Per aïllar la X de l'equació $A \cdot X \cdot B = C + 4 \cdot D \Rightarrow$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (C + 4 \cdot D) \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (C + 4 \cdot D) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C + 4 \cdot D) \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$