



Nom:

- 1) Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & +y & +3z & = & k \\ & 2y & +z & = & 0 \\ x & +3y & +k^2 z & = & 2 \end{array} \right\}$$

- Discuti el sistema en funció del paràmetre k .
- Determineu la solució del sistema pels valors de k que fa que el sistema sigui compatible indeterminat.
- Doneu la solució per al cas en que el sistema sigui compatible determinat.

[3+1+2=6 punts]

- 2) Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculeu A^{-1} i B^{-1} .
- Determineu X perquè es compleixi l'equació $A \cdot X \cdot B = 2C$

[2 punts]

- 3) Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs $(0,1)$, $(2,0)$ i $(3,4)$.

[2 punts]

- 4) El vaixell de Barcelona a Palma de Mallorca porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa 4 places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1.000 kg i cada camió 9.000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300.000 kg. La companyia cobra 50 € per cada cotxe i 300 € per cada camió. Calculeu el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per obtenir un benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim.

[4 punts]

- 5) Calculeu el límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x)$

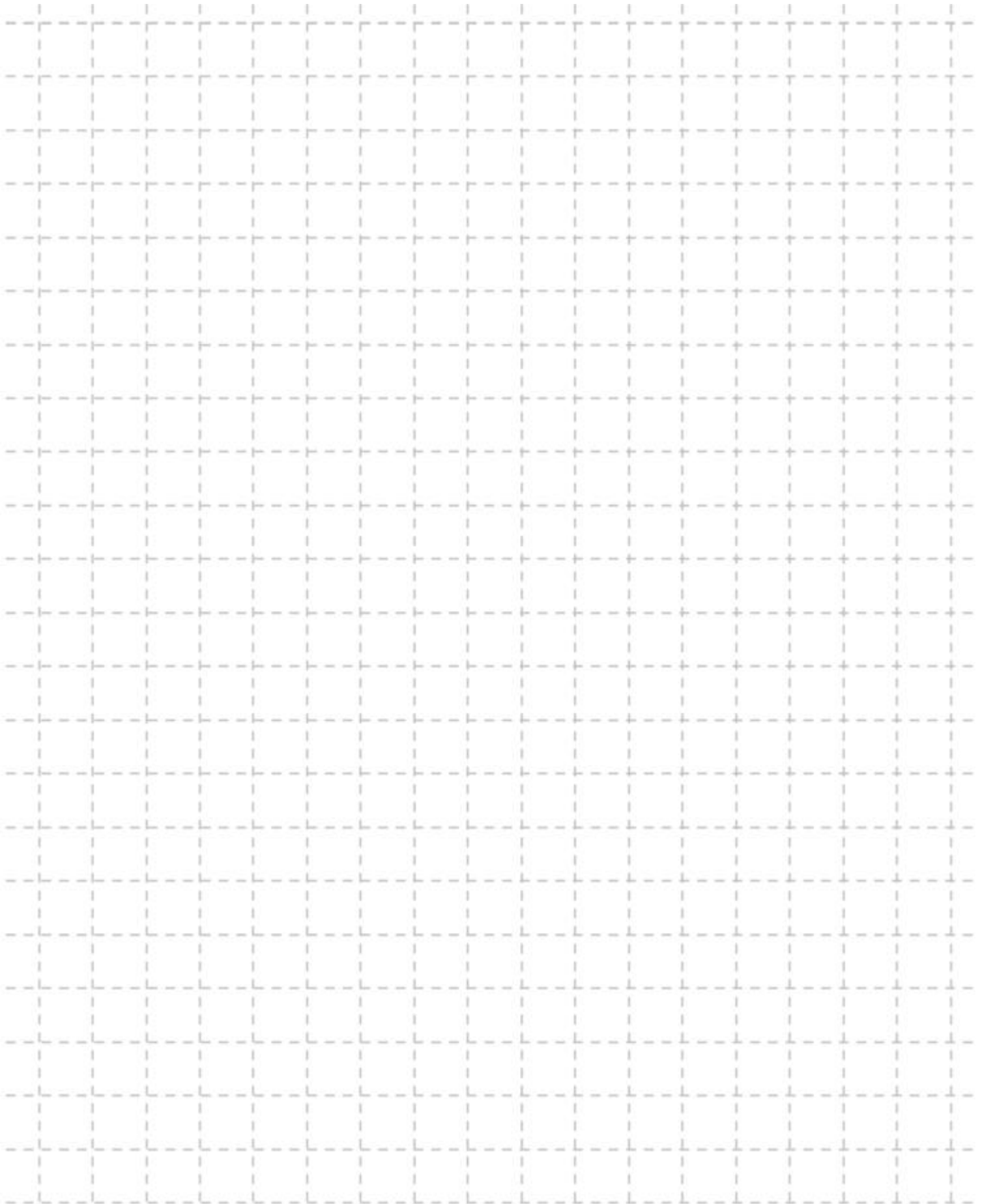
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

[2 punts]



Nom:





Nom:

1) Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & +y & +3z & = k \\ & 2y & +z & = 0 \\ x & +3y & +k^2 z & = 2 \end{array} \right\}$$

- Discuti el sistema en funció del paràmetre k .
- Determineu la solució del sistema pels valors de k que fa que el sistema sigui compatible indeterminat.
- Doneu la solució per al cas en que el sistema sigui compatible determinat.

[3+1+2=6 punts]

Solució: a) Resolent pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & k^2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k^2-3 & 2-k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & 2-k \end{array} \right)$$

Per a $k \notin \{-2, 2\}$ el sistema és compatible determinat.

Per $k = -2$ la darrera equació fa el sistema incompatible.

Per $k = 2$ la darrera equació es cancel·la i el sistema esdevé compatible indeterminat.

b) Per $k = 2$ la solució és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ d'on resulta: } \left. \begin{array}{l} z = z \\ y = -\frac{z}{2} \\ x = 2 - 3z + \frac{z}{2} = 2 - \frac{5z}{2} \end{array} \right\} \forall z \in \mathbb{R}$$

c) Quan $k \neq 2$ i -2 el sistema és SCD i ara aïllant les variables de les equacions tenim:

$$F3 \Rightarrow z = \frac{2-k}{k^2-4} = \frac{-(k-2)}{(k+2)(k-2)} = \frac{-1}{k+2}$$

$$F2 \Rightarrow 2y = -z \Rightarrow y = \frac{-z}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2(k+2)}$$

$$F1 \Rightarrow x = k - y - 3z = k - \frac{1}{2(k+2)} + \frac{3}{k+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{k \cdot 2 \cdot (k+2) - 1 + 3 \cdot 2}{2(k+2)} = \frac{2k^2 + 4k - 1 + 6}{2(k+2)} = \frac{2k^2 + 4k + 5}{2(k+2)}$$

Per tant la solució és:

$$x = \frac{2k^2 + 4k + 5}{2(k+2)}; y = \frac{1}{2(k+2)}; z = \frac{-1}{k+2}$$



Nom:

2) Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Calculeu A^{-1} i B^{-1} .

d) Determineu X perquè es compleixi l'equació $A \cdot X \cdot B = 2C$.

[2 punts]

a.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right). \text{ Tenim que } A^{-1} = A.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \text{ Per tant, } B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b.

$$A \cdot X \cdot B = 2C \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2 punts]

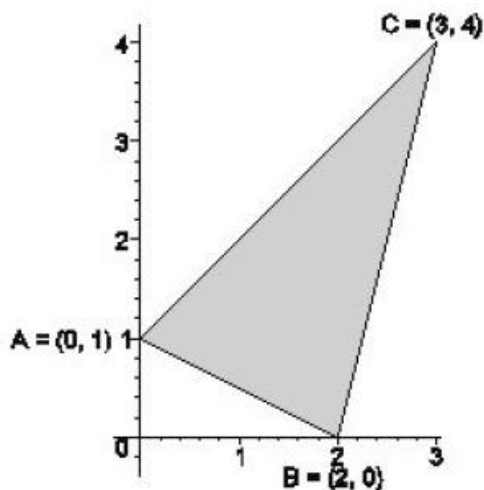


Nom:

- 3) Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs $(0,1)$, $(2,0)$ i $(3,4)$.

[2 punts]

Solució: Dibuixem la regió factible.



La recta AC té ordenada a l'origen 1 i pendent 1. La seva equació és $y = x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \leq x + 1$.

La recta AB té ordenada a l'origen 1 i pendent $-\frac{1}{2}$. La seva equació és $y = -\frac{1}{2}x + 1$,

i la regió factible que delimita serà $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$.

La recta BC passa pel punt $(2,0)$ i té pendent 4. La seva equació és $y = 4(x - 2)$, i la regió factible que delimita serà $y \geq 4(x - 2)$. El sistema demanat és:

$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \geq -\frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq 4x - 8 \end{cases}$$



Nom:

- 4) El vaixell de Barcelona a Palma de Mallorca porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa 4 places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1.000 kg i cada camió 9.000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300.000 kg. La companyia cobra 50 € per cada cotxe i 300 € per cada camió. Calculeu el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per obtenir un benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim.

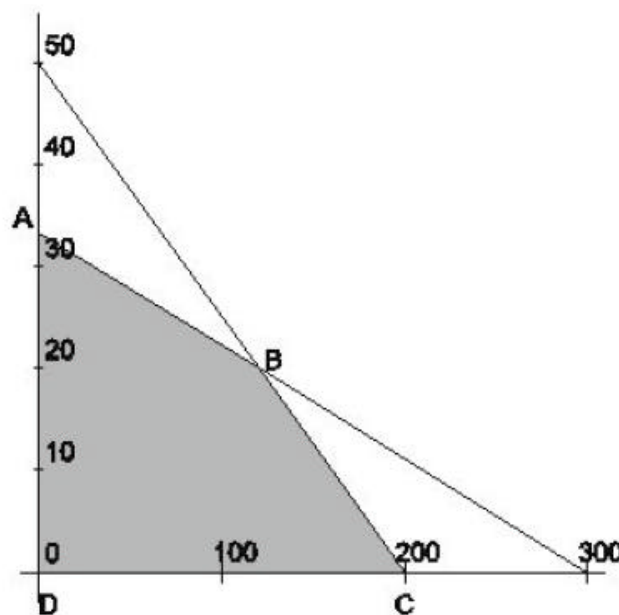
[4 punts]

Puntuació: plantejament del sistema: 1 punt; gràfic: 1 punt; determinació dels vèrtexs: 1 punt; determinació del benefici màxim: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: Anomenem x al nombre de cotxes i y al nombre de camions. Les restriccions són: $x + 4y \leq 200$ pel que fa al nombre de places i $1000x + 9000y \leq 300000$ pel que fa al pes. A més totes dues incògnites han de ser positives. El sistema de restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 4y \leq 200 \\ x + 9y \leq 300 \end{cases}$$

que dona la regió factible del gràfic següent:



Determinem les coordenades dels vèrtexs: B és el punt d'intersecció de les dues rectes $x + 4y = 200$ i $x + 9y = 300$ i val $B = (120, 20)$. Els altres dos són les

interseccions amb els eixos de les rectes anteriors que són: $A = \left(0, \frac{100}{3}\right)$ i

$C = (200, 0)$.

La funció objectiu de beneficis que volem maximitzar és $B(x, y) = 50x + 300y$. Fem la taula



Nom: _____

	$A\left(0, \frac{100}{3}\right)$	$B(120, 20)$	$C(200, 0)$	$D(0, 0)$
$B(x, y) = 50x + 300y$	10000	12000	10000	0

Per tant, el benefici màxim s'obté portant 120 cotxes i 20 camions i és de 12000 €.

5) Calculeu el límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Resolució

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 - x} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2 + 0 = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

A l'apartat d) podem dir que és zero per la dreta.

[0,5·4 = 2 punts]