



Nom: _____

1) Calculeu la derivada de les funcions següents:

a) $y = 3x\sqrt{2x+1}$

b) $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{x}{(x+2)^2}$

d) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

e) $y = e^{2x+1}$

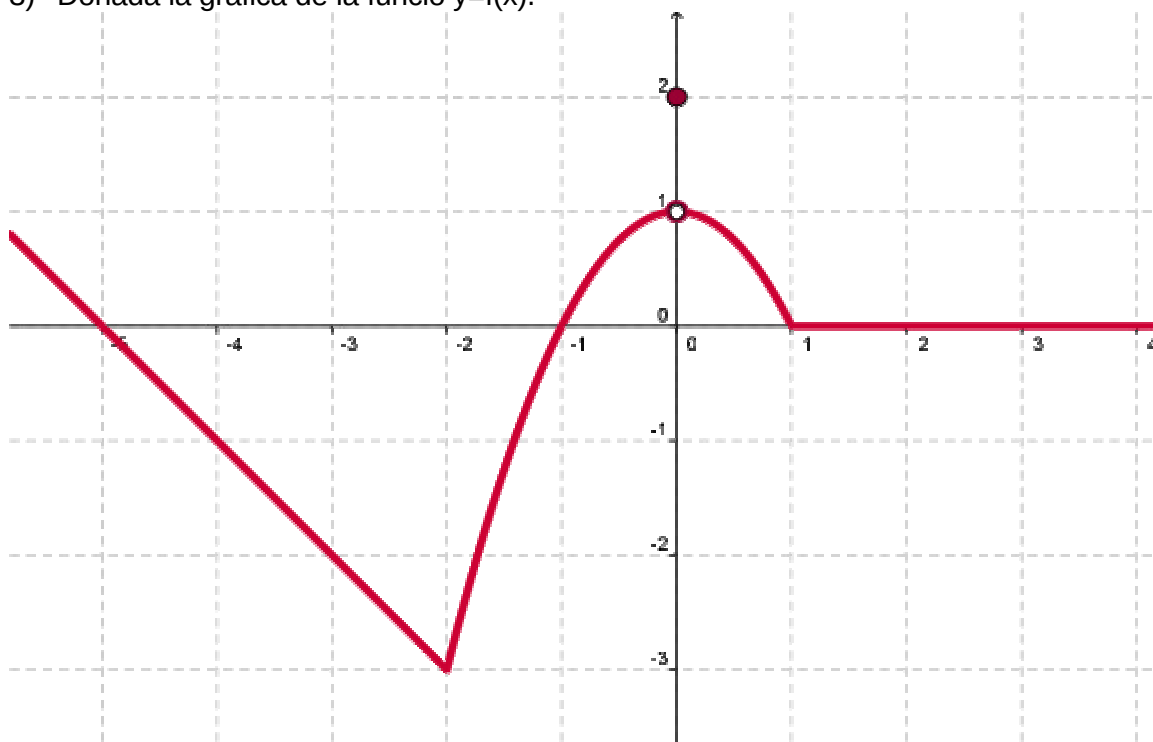
f) $y = \ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

(4,5 punts)

2) Calculeu la derivada $f(x) = (\cos(2x))^{2x+5}$

(1 punts)

3) Donada la gràfica de la funció $y=f(x)$.



a) Estudieu la seva continuïtat i derivabilitat.

b) Calculeu els valors de:

$f'(-5) =$ $f'(-2^-) =$ $f'(0^-) =$ $f'(0^+) =$ $f'(0) =$

c) En quins valors $f'(x) = 0$?

(1+0,5+0,25=1,75 punts)

4) Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x < -3 \\ x^2+2x-1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ bx+c & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudieu la derivabilitat i continuïtat de la funció per als diferents valors dels paràmetres "a", "b" i "c"

b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de "a", "b" i "c" que fan que $f(x)$ sigui contínua i derivable en més punts.

(2+0,75=2,75 punts)



Nom:

1) Calculeu la derivada de les funcions següents:

a) $y = 3x\sqrt{2x+1}$

b) $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{x}{(x+2)^2}$

d) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

e) $y = e^{2x+1}$

f) $y = \ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

(4,5 punts)

Resolució

a) $y' = 3\sqrt{2x+1} + 3x \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{3(2x+1) + 3x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{9x+3}{\sqrt{2x+1}}$

b) $y' = \frac{-5 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-5}{2x\sqrt{x}}$

c) $y' = \frac{(x+2)^2 - x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{x+2-2x}{(x+2)^3} = \frac{-x+2}{(x+2)^3}$

d) $y' = 2 \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = 2 \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-4(1-x)}{(1+x)^3}$

e) $y' = 2e^{2x+1}$

f) $y' = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{x}{3} + 1} = \frac{1}{3} : \frac{x+3}{3} = \frac{1}{x+3}$

2) Calculeu la derivada $f(x) = (\cos(2x))^{2x+5}$

(1 punts)

Cal fer derivació logarítmica:

Primer apliquem logaritme neperià als dos membres

$$\ln(f(x)) = \ln\left[(\cos(2x))^{2x+5}\right]$$

Per les propietats dels logaritmes tenim que

$$\ln(f(x)) = (2x+5) \ln(\cos(2x))$$

Ara derivem els dos membres i aïllem la derivada de la funció

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln(\cos(2x)) + (2x+5) \frac{-\sin(2x) \cdot 2}{\cos(2x)}$$

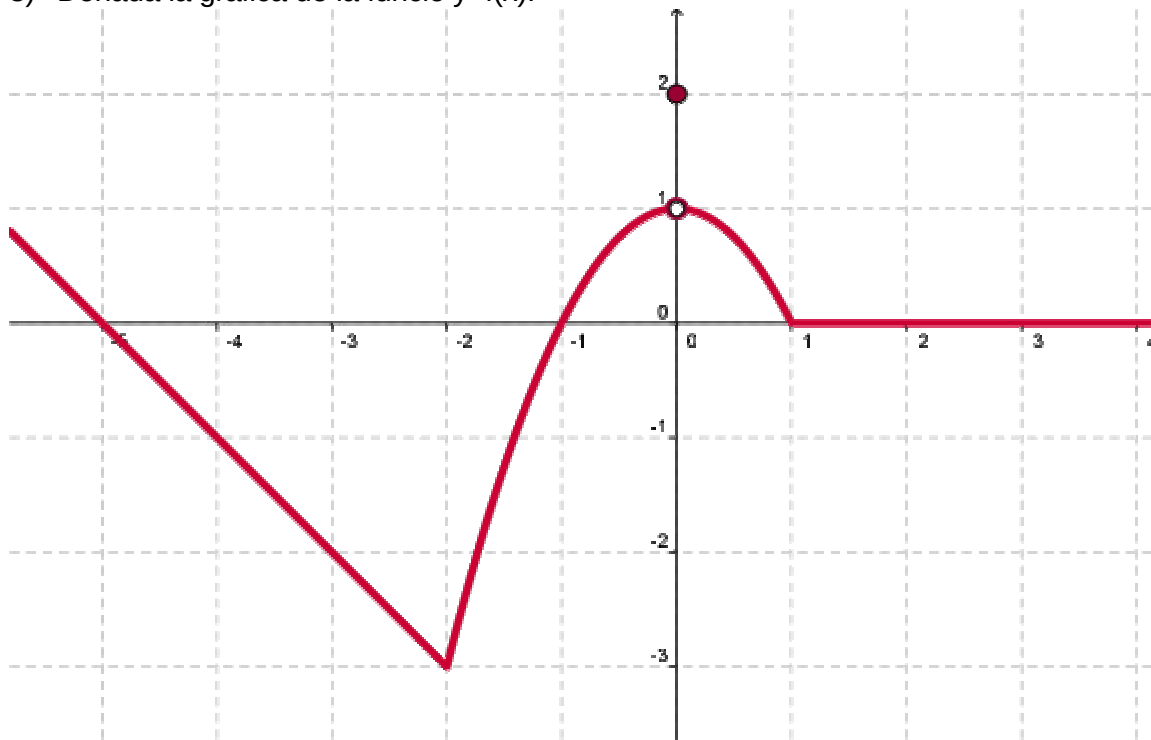
$$f'(x) = f(x) \cdot \left[2 \ln(\cos(2x)) + (2x+5) \frac{-\sin(2x) \cdot 2}{\cos(2x)} \right]$$

$$f'(x) = (\cos(2x))^{2x+5} \cdot \left[2 \ln(\cos(2x)) + (2x+5) \frac{-\sin(2x) \cdot 2}{\cos(2x)} \right]$$



Nom: _____

3) Donada la gràfica de la funció $y=f(x)$.



a) Estudieu la seva continuïtat i derivabilitat.

Contínua en tots els punts de domini menys en el punt de $x=0$ on hi ha una discontinuïtat evitable.

Derivable en tots els punts del domini menys en els punts:

- de $x=-2$ (on les dues derivades laterals no coincideixen),
- de $x=0$ (on la funció no és contínua) i
- de $x=1$ (on les dues derivades laterals no coincideixen),

b) Calculeu els valors de:

$$f'(-5) = 0 \quad f'(-2^-) = -1 \quad f'(0^-) = 0 \quad f'(0^+) = 0 \quad f'(0) = \text{no existeix}$$

c) En quins valors $f'(x) = 0$?

En els x de l'interval $(1, +\infty)$

(1+0,5+0,25=1,75 punts)



Nom: _____

4) Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Estudieu la derivabilitat i continuïtat de la funció per als diferents valors dels paràmetres "a", "b" i "c"
b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de "a", "b" i "c" que fan que f(x) sigui contínua i derivable en més punts.

(2+0,75=2,75 punts)

La funció és clarament contínua i derivable en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$

A més sabem fins i tot que la derivava en aquests punt és:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ 2x + 2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ara hem de mirar si la funció és contínua en $x=-3$ i en $x=0$

I) per a que sigui contínua en $X = -3$ han de ser iguals aquestes tres coses:

- $f(-3) = 2(-3) + a = -6 + a$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} 2x + a = 2(-3) + a = -6 + a$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x^2 + 2x - 1 = (-3)^2 + 2(-3) - 1 = 9 - 6 - 1 = 2$

Així doncs cal que $-6 + a = 2 \Rightarrow a = 8$

II) per a que sigui contínua en $X=0$ han de ser iguals aquestes tres coses:

- $f(0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x - 1 = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx + c = c$

Així doncs cal que $\Rightarrow c = -1$

Ara hem de mirar si la funció és derivable en aquests punts:

En $x=-3$? mirem si són iguals les dues derivades laterals

- $f'(-3^-) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} 2 = 2$
- $f'(-3^+) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} 2x + 2 = -6 + 2 = -4$

Per tant com no són iguals resulta que no és derivable en $X = -3$

En $x=0$?

- $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + 2 = 2$
- $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b = b$

Per tant si $b=2$ resulta que és derivable en $X = 0$



Nom:

Així doncs la resposta del 1r apartat és:

- ☐ La funció és clarament contínua i derivable en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$
- ☐ Sí $a=8$ també és contínua en $X=-3$ on no és derivable.
- ☐ Sí $a \neq 8$ aleshores no és contínua en $X=-3$ i per tant tampoc serà derivable en el punt
- ☐ Si $c=-1$ i $b=2$ també és contínua i derivable en $X=0$
- ☐ Si $c=-1$ i $b \neq 2$ també és contínua en $x=0$, però no hi és derivable en el punt.
- ☐ Sí $c \neq -1$ aleshores no és contínua en $X=0$ i per tant tampoc serà derivable en el punt

Ara només cal que representem gràficament la funció anterior pels valors trobats de " $a=8$ i " $b=2$ " i " $c=-1$ "

$$f(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Només cal que representem cada tros: una semirecta inclinada, un tros de paràbola i una semirecta horitzontal

