

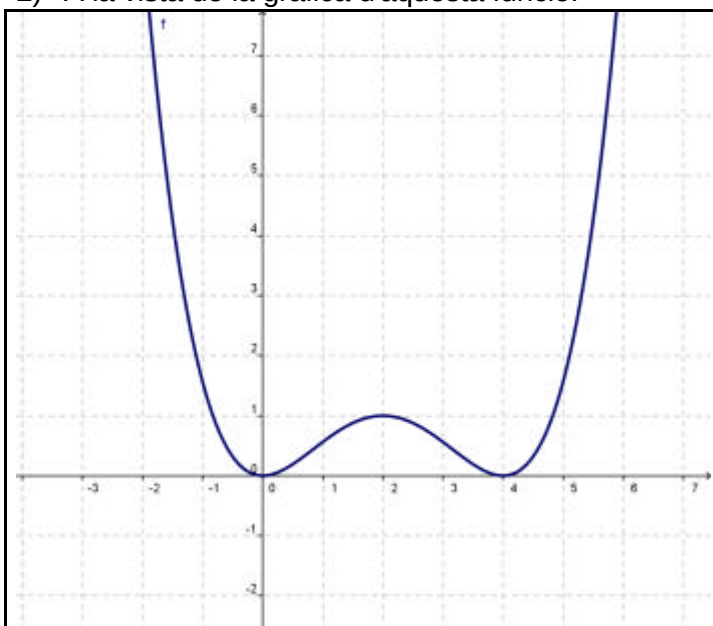


Nom: _____

- 1) Donada la funció $y = x^3 - 6x^2 + 8x$
- Troba la recta tangent en el seu punt d'inflexió.
 - Troba la recta normal en el punt de $x=1$

(1+0,5= 1,5 punts)

- 2) A la vista de la gràfica d'aquesta funció.



- Estudia la monotonia de la funció (creixement, decreixement i màxims i mínims locals)
- Estudia el signe de la 1a derivada.
- Estudia la curvatura de la funció (concavitat, convexitat i punt d'inflexió).
- Estudia el signe de la 2a derivada
- Quina és la recta tangent a la corba en el punt (2,1)
- Quina és la recta normal a la corba en el punt de $x=4$?

(0,5*4+0,25*2=2,5 punts)

- 3) Donada la funció $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Estudieu

- El seu domini, continuïtat i derivabilitat.
- Les seves asímptotes
- Calculeu i simplifiqueu les seves 1a i 2a derivada.
- La seva monotonia (creixement, decreixement, màxims i mínims locals)
- La seva curvatura (concavitat, convexitat i punt d'inflexió)
- Representeu gràficament la funció anterior.

(0,5+1,25+1+1+1+1,25=6 punts)



Nom: _____

1) Donada la funció $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

- a) Troba la recta tangent en el seu punt d'inflexió.
b) Troba la recta normal en el punt de $x=1$

(1+0,5= 1,5 punts)

a) Per trobar el punt d'inflexió calculem primer la 2a derivada.

$$y' = 3x^2 - 12x + 8 \Rightarrow y'' = 6x - 12$$

Per tant tenim un candidat a punt d'inflexió en el punt on $y'' = 0$ que és en $x=2$

Per assegurar-nos que en aquest punt tenim un punt d'inflexió estudiem el signe de la 2a derivada al seu voltant:

x		2	
y		0	
y'			
y'' = 6x - 12	-----	0	+++++

Per tant efectivament en $x=2$ [és a dir en $(2, f(2)) = (2, 0)$] hi ha un punt d'inflexió

La recta tangent serà una recta del tipus $y = m x + n$ on

$$m = y'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 8 = 12 - 24 + 8 = -4 \Rightarrow y = -4x + n$$

i ara imposat que passa pel punt $(2, 0)$ obtenim que $0 = -8 + n \Rightarrow n=8$

i la recta buscada és $y = -4x + 8$

b) El punt és el $(1, f(1)) = (1, 3)$

Calculem quan val $y'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 12 \cdot (1) + 8 = 3 - 12 + 8 = -1 \Rightarrow$ el pendent de la

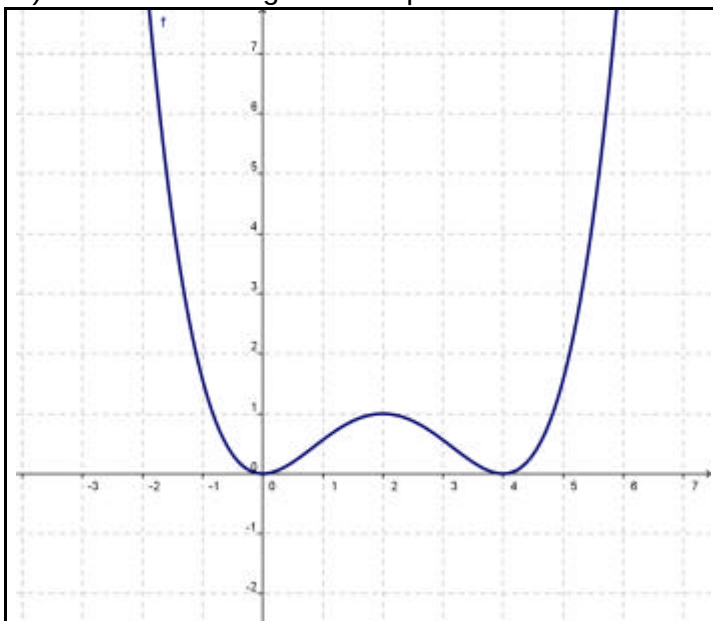
recta normal (que és la perpendicular a la tangent és $m = \frac{-1}{y'(1)} = \frac{-1}{-1} = 1$ així doncs

la recta normal és al recta $Y=X+n$ que passa pel punt $(1, 3) \Rightarrow 3=1+n \Rightarrow n=2 \Rightarrow$ la recta buscada és $y = x + 2$



Nom:

2) A la vista de la gràfica d'aquesta funció.



a) Estudia la monotonia de la funció (creixement, decreixement i màxims i mínim locals)

Creix $\forall x \in (0,2) \cup (4,+\infty)$

Decreix $\forall x \in (-\infty,0) \cup (2,4)$

Màxim en $x=2$, és a dir en $(2,1)$

Mínim en $x=0$ i en $x=4$, és a dir en $(0,0)$ i $(4,0)$

b) Estudia el signe de la 1a derivada.

x		0		2		4	
y							
y'	-	0	+	0	-	0	+

c) Estudia la curvatura de la funció (concavitat, convexitat i punt d'inflexió).

Punts d'inflexió en aproximadament $x = 1$ i $x = 3$

Còncava $\forall x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$ i **Convexa** $\forall x \in (1,3)$

d) Estudia el signe de la 2a derivada

x		1		3	
y					
y'					
y''	+++++	0	-----	0	+++++

e) Quina és la recta tangent a la corba en el punt $(2,1)$

La recta horitzontal $Y=1$

f) Quina és la recta normal a la corba en el punt de $x=4$?

La recta vertical $X=4$

(0,5*4+0,25*2=2,5 punts)

3) Donada la funció $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Estudieu

a) El seu domini, continuïtat i derivabilitat.

Domini $R - \{2\}$, ja que només cal treure els valors que anul·len el denominador

Com és un quocient de polinomis és contínua i derivable en tots els valors del seu domini, és a dir en $R - \{2\}$

b) Les seves asímptotes

Verticals. Mirem si ho és la recta $X=2$. Estudiem els dos límits laterals

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty \quad \text{per tant sí és}$$

asímtota la recta $X=2$ i en els dos casos la funció va cap a + infinit.

Inclinades. Com la funció és un quocient de polinomis si hi ha asímtota per

$X \rightarrow +\infty$ també ho serà per $X \rightarrow -\infty$

Per tant anem a calcular-ho per $X \rightarrow +\infty$. La asímtota és una recta d'equació



Nom:

y = m x + n on

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - (x^3 - 4x^2 + 4x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4 \end{aligned}$$

Així doncs la recta Y = X + 4 és asímptota per $x \rightarrow +\infty$ i també per $x \rightarrow -\infty$

c) Calculeu i simplifiqueu les seves 1a i 2a derivada.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{\cancel{(x-2)} [3x^2(x-2) - 2x^3]}{(x-2)^4} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 12x)(x-2)^3 - (x^3 - 6x^2) \cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(3x^3 - 12x^2 - 6x^2 + 24x) - (3x^3 - 18x^2)}{(x-2)^4} = \frac{24x}{(x-2)^4}$$

d) La seva monotonia (creixement, decreixement, màxims i mínims locals)

x		0		2		6	
y		0		$\nexists$		27/2	
y'	+++++	0	+++	$\nexists$	----	0	+++++

Creix $\forall x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$, Decreix $\forall x \in (2, 6)$ i té un mínim local en x=6 [és a dir en (6 , 27/2)]

e) La seva curvatura (concavitat, convexitat i punt d'inflexió)

x		0		2		6	
y		0		$\nexists$		27/2	
y'	+++++	0	+++	$\nexists$	---	0	+++++
y''	-----	0	+++	$\nexists$	+++++	+++++	+++++
	Convexa	PI	Còncava			Còncava	

Convexa $\forall x \in (-\infty, 0)$, Còncava $\forall x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ i té un punt d'inflexió en x=0 [és a dir en (0,0)]



Nom: _____

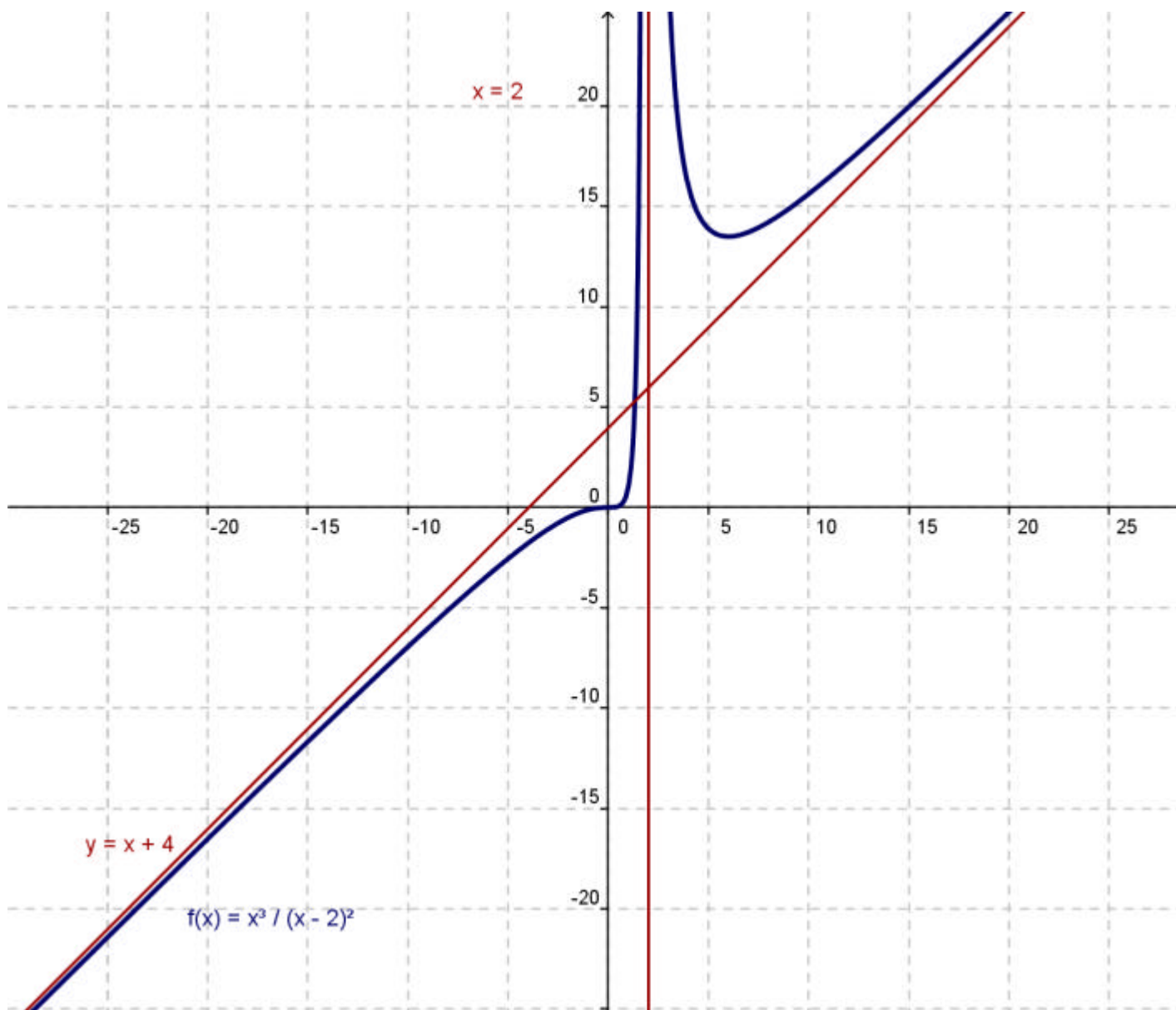
Representeu gràficament la funció anterior.

Amb tota aquesta informació fent la taula resum completem amb algun valor, dibuixem les asímtotes i el dibuix és clar:

x	-10	0	1	2	3	6	10
y	-6,94	0	1	$\nearrow$	27	27/2	15,63
y'	++++++ +	0	+++	$\nearrow$	---	0	++++++
y''	-----	0	+++	$\nearrow$	+++++	+++++	+++++
	Convexa	PI	Cònc				Còncava

Asímtotes:

- ☐ $X=2$ (tant per la dreta com per l'esquerra la funció va cap a més infinit)
- ☐ $Y = X + 4$



(0,5+1,25+1+1+1+1,25=6 punts)



Nom:

