Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2MS
Aplicacions de les derivades II

Nom: **Grup:**

---

1) El benefici B(x) (expressat en milers d'euros), que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte ve donat per la funció:
   $B(x) = -\ x^2 + 300x - \ 16100$ per a $50 \le x \le 250$.
   a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
   b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3900 milers d'euros?
   c) Quantes unitats ha de vendre per a que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
   d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

   (0,5+1*3=3,5 punts)

2) De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm,
   a) trobeu la longitud dels catets d'aquell que té perímetre màxim.
   b) trobeu la longitud dels catets d'aquell que té àrea màxima.

   (3+2=5 punts)

3) De la funció $\mathbf{f(x) = x^2 + a\,x + b}$ se'n sap que té un mínim en x=2 i que la seva gràfica passa pel punt (2,2).
   Tenint en compte aquestes dades quan val la funció en x=1?

   (1,5 punts)

1) El benefici B(x) (expressat en milers d'euros), que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte ve donat per la funció:
$B(x) = -\ x^2 + 300x -\ 16100$ per a $50 \le x \le 250$.
   a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
   b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3900 milers d'euros?
   c) Quantes unitats ha de vendre per a que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
   d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

(0,5+1*3=3,5 punts)

Solució:

a) $B(110) =$ **4800 milers d'euros.**

b) Si B(x) = 3900 resulta l'equació: $3900 = -x^2 + 300x - 16100$ o de forma equivalent
$x^2 - 300x + 20000 = 0$, d'on resulten $X_1 = 200$ i $X_2 = 100$.
Per tant pot haver venut 100 o 200 unitats de producte.

c) Per obtenir el benefici màxim hem d'igualar a 0 la derivada de B(x) que representa una paràbola amb un vèrtex amb màxim.
Tenim $B'(x) = -2x + 300$.
Per tant el màxim s'obté per X_M=150, valor pel qual el benefici és B(150) = 6400 milers d'euros.

També es pot estudiar els signes de B ' (x) per determinar el creixement i decreixement de la funció

x		**50**	**150**	**250**	
B(x)		**Creix**	**6400**	**Decreix**	
B'(x)		**+ + + + + + +**	**0**	**– – – – – – – – – – – –**	

i per tant queda clar que **el màxim absolut s'obté per X_M=150, valor pel qual el benefici és B(150) = 6400 milers d'euros.**

d) Per no tenir pèrdues cal que $B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \ge 0$.
Resolent la inequació o dibuixant ràpit la paràbola de branques cap a baix que talla els eixos en els punts on B(x)=0

$$x = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4 \cdot 16100}}{-2} = \frac{-300 \pm 160}{-2} = \begin{cases} = 70 \\ = 230 \end{cases}$$

o estudiant els signes de B(x):

x		**50**	**70**		**230**	**250**	
B(x)		**– – – –**	**0**	**+ + + + + + + + + + +**	**0**	**– – – –**	

Per tant no tindrà pèrdues per 70 ≤ X ≤ 230 .

2) De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm,
   a) trobeu la longitud dels catets d'aquell que té perímetre màxim.
   b) trobeu la longitud dels catets d'aquell que té àrea màxima.

(3+2=5 punts)

a)

Solució:

Siguin x i y els catets del triangle. Llavors sabem, d'acord amb el teorema de Pitàgores, que $x^2+y^2=10^2$, la qual cosa ens permet aïllar, per exemple, el valor de la variable y en funció de la x: $y=\sqrt{100-x^2}$.

El perímetre del triangle és $P=10+x+y=10+x+\sqrt{100-x^2}$.

Per trobar el màxim d'aquest valor, calculem la derivada del perímetre respecte de x.

$P'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$. Igualem aquesta expressió a zero i esbrinem el valor de la variable x,

$$P'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{100-x^2} \Leftrightarrow 2x^2=100 \Leftrightarrow x=\pm 5\sqrt{2}.$$

El valor negatiu no té cap sentit en aquest problema (encara més: es pot observar que el valor negatiu NO ÉS solució de l'equació $P'(x)=0$). Així, ens quedarem amb $x=5\sqrt{2}$. Llavors, $y=\sqrt{100-(5\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$.

Atenció: Recordeu que quan es soluciona una equació irracional cal comprovar les solucions obtingudes. I que quan es fa una arrel d'índex parell normalment hi ha 2 solucions, per tant cal discutir si les dues valen o no.

El domini P(x) = (0,10)

x	0		$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$		10
P(x)		Creix	$10+2\sqrt{50}=10+10\sqrt{2}$	Decreix	
P'(x)		+ + + + + +	0	– – – – – – – – – – –	

Per tant per al valor de x= $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ **cm i y=** $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ **cm es té un màxim local i absolut de la funció**

b)

Ara la funció a maximitzar és A(x,y)= (x · y) / 2

Però com $y=\sqrt{100-x^2}$ tenim que substituint a la funció obtenim la funció d'una variable:

$$A(x)=\frac{x\cdot\sqrt{100-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{x^2(100-x^2)}}{2}=\frac{\sqrt{100x^2-x^4}}{2}=\frac{\left(100x^2-x^4\right)^{1/2}}{2}$$

El domini A(x) = (0,10)

Per tant per obtenir el màxim d'aquesta funció estudiem els signes de A ' (x)

$$A'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(100x^2-x^4\right)^{-1/2}(200x-4x^3)=\frac{200x-4x^3}{4\sqrt{100x^2-x^4}}=\frac{\cancel{4}x(50-x^2)}{\cancel{4}\sqrt{100x^2-x^4}}$$

A ' (x) = 0

$$\Leftrightarrow \frac{x(50-x^2)}{\sqrt{100x^2-x^4}}=0 \Leftrightarrow x(50-x^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 50-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{50} \end{cases}$$

Així doncs només tenim un candidat possible ja que x no pots ser negativa ni zero.

I estudiant el signe de A ' (x) en les zones, podem deduir el creixement de la funció A(x)

x	**0**		$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$		**10**
A(x)		**Creix**	$10+2\sqrt{50}=10+10\sqrt{2}$	**Decreix**	
A'(x)		**+ + + + + +**	**0**	**– – – – – – – – – – –**	

Per tant per al valor de x = $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ **cm i y =** $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ **cm es té un màxim local i absolut de la funció**

3) De la funció **f(x) = $\mathbf{x^2}$ + a x + b** se'n sap que té un mínim en x=2 i que la seva gràfica passa pel punt (2,2).
Tenint en compte aquestes dades quan val la funció en x=1?

(1,5 punts)

f '(x) = 2 x + a

Com que en x=2 hi ha un mínim tenim f ' (2) =0 $\Rightarrow$ 4 +a = 0 $\Rightarrow$ a= – 4

També sabem que f(2) = 2 $\Rightarrow$ 4 + 2 a + b = 2 $\Rightarrow$ 4 – 8 + b = 2 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ b = 6

Per tant ja sabem que f(x) = $\mathbf{x^2}$ – 4 x + 6 i per tant f(1) = 1 – 4 + 6 = 3