1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)^{\frac{8}{x-3}} =$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{2-x} =$

c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x}{e^x-10^x} =$

d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^5-8x}{-3x^5+7} =$

(1,5 + 0,75+1+0,75 = 4 punts)

2) Donada la funció $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-4x}$

Estudieu la continuïtat d'aquesta funció i indiqueu de quin tipus són les discontinuïtats que presenta.

(3 punts)

3) Donada la funció y=f(x)

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & \text{si } x\le -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2<x<1 \\ bx+3 & \text{si } 1\le x \end{cases}$$

a) Trobeu els valors dels paràmetres "a" i "b" per tal que la funció sigui contínua a tot $\mathbb{R}$

b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de "a" i "b"

(2+1=3 punts)

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)^{\frac{8}{x-3}}=$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{2-x}=$

c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x}{e^x-10^x}=$

d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^5-8x}{-3x^5+7}=$

(1,5 + 0,75+1+0,75 = 4 punts)

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)^{\frac{8}{x-3}}=1^{\frac{8}{0}}=1^{\infty}$ per tant és un indeterminació.

Anem a fabricar el número **"e"**

ARREGLEM LA BASE:

$$\left(1+\frac{3x-7}{x-1}-1\right)=\left(1+\frac{3x-7-x+1}{x-1}\right)=\left(1+\frac{2x-6}{x-1}\right)=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2x-6}\right)}\right)$$

I ARA TOT EL LÍMIT

$$L=\lim_{x\to 3}\left(\frac{3x-7}{x-1}\right)^{\frac{8}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2x-6}\right)}\right)^{\frac{8}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2x-6}\right)}\right)^{\left(\frac{x-1}{2x-6}\right)\cdot\frac{8}{x-3}\cdot\frac{2x-6}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 3}\left(\frac{8}{x-3}\cdot\frac{2x-6}{x-1}\right)}=e^{\lim_{x\to 3}\left(\frac{8}{\cancel{(x-3)}}\cdot\frac{2\cdot\cancel{(x-3)}}{x-1}\right)}=e^{\frac{8\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}}=e^{8}$$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^{2-x}=\left(\frac{7}{5}\right)^{2+\infty}=\left(\frac{7}{5}\right)^{+\infty}=+\infty$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{e^x-10^x}\underset{q(10^x)>q(e^x)}{\overset{q(x^2)>q(3x)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-10^x}\overset{q(x^2)<q(10^x)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-10^x}=\frac{1}{-\infty}=0^-$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-8x}{-3x^5+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{-3x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3}$$

2) Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-4x}$

Estudieu la continuïtat d'aquesta funció i indiqueu de quin tipus són les discontinuïtats que presenta.

(3 punts)

- La funció és contínua en R –{0,4} i anem a veure que passa quan X= 0 i X=4, que com no són del valors domini podem dir que la funció és discontínua en aquest valors.
- Ara anem a classificar les discontinuïtats en x=0 i x=4

I) En x=0

- $\nexists f(0)$
- $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{x^2-4x}=Indeter\ \frac{0}{0}\Rightarrow$$
  $$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{x^2-4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-4)}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)}{(x-4)}=\frac{1}{-4}=\frac{-1}{4}$$
- $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x^2-4x}=Indeter\ \frac{0}{0}\Rightarrow$$
  $$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x^2-4x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-4)}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)}{(x-4)}=\frac{1}{-4}=\frac{-1}{4}$$

Per tant és una discontinuïtat evitable

II) En x=4

- $\nexists f(4)$
- $$\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}\frac{x^2+x}{x^2-4x}=\frac{16+4}{0^-}=-\infty$$
- $$\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{x^2+x}{x^2-4x}=\frac{16+4}{0^+}=+\infty$$

Per tant en x=4 hi ha una discontinuïtat asimptòtica

3)

Donada la funció y=f(x)

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

a) Trobeu els valors dels paràmetres "a" i "b" per tal que la funció sigui contínua a tot $\mathbb{R}$

b) Representeu gràficament la funció anterior pels valors trobats de "a" i "b"

(2+1=3 punts)

**Resolució**

a) • $f$ és contínua si $x < -2$, si $-2 < x < 1$ i si $1 < x$, ja que està definida per funcions contínues.

• Perquè $f$ sigui contínua en $x = -2$, ha de complir-se que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$.

$f(-2) = -2(-2) + a = 4 + a$

$$\lim_{x \to -2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} (-2x + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = 4 - 5 = -1 \end{cases} \quad \text{Per tant, } 4 + a = -1 \rightarrow a = -5$$

• Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 1$, ha de ser $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$f(1) = b \cdot 1 + 3 = b + 3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 5) = -4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (bx + 3) = b + 3 \end{cases} \quad \text{Per tant, } b + 3 = -4 \rightarrow b = -7$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$