Generalitat de Catalunya
Departament d’Educació
Institut d’Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
Ampliació de matemàtiques
Probabilitat III:
Distribucions de probabilitat

Nom: **Grup:**

1. En una loteria popular hi ha 1.000 números. Es rifa un número que guanya 5.000 €. L'anterior i el següent guanyen 1.000 €. Tots els que tenen la mateixa terminació que el guanyador s'emporten 10 € (el del 1r premi també) i la resta res. Considerem la variable aleatòria X = "premi obtingut per una persona que jugui un número".
   a) Calcula la distribució de probabilitat corresponent. És a dir, omple la 2a columna de quadre adjunt.
   b) **Sense utilitzar les tecles d'estadístiques de la calculadora,** calcula la esperança matemàtica (m) i la desviació tipus (s) d'aquesta distribució.

x_i	p_i			
5000 €				
1000€				
10 €				
0 €				

(0,5+0,75+0,75=2 punts)

2. En una urna **A** hi ha 5 boles numerades de l'1 al 5 i en una altra urna **B** hi ha 4 boles numerades del 6 al 9. Es llança una moneda: si surt cara es treu una bola de A, i si surt creu, es treu de B. S'observa el nombre de la bola.
   a) Fes la taula de la distribució de probabilitat associada a aquesta variable aleatòria.
   b) Representa-la gràficament.
   c) Calcula m i s (**pots fer servir la calculadora**)

(0,75+0,5+1=2,25 punts)

3. En una certa població la probabilitat de néixer noia és del 0,6. Si una família té 6 fills calculeu:
   a) La probabilitat que tingui exactament 4 noies.
   b) La probabilitat que no tingui cap noi.

(0,75+0,75=1,5 punt)

4. Les estatures dels individus d'una població es distribueixen normalment amb una mitjana de 175 cm i una desviació típica de 10 cm. Calcula la probabilitat que:
   a) Un individu tingui una estatura major de 180 cm.
   b) Un individu tingui una estatura menor de 170 cm.
   c) Quina proporció d'individus té una estatura compresa entre 170 i 180 cm?

(0,75+0,75+0,75=2,25 punts)

5. Experimentalment una empresa ha vist que la probabilitat de un treballador estigui malalt un dia concret és del 0,2. Si l'empresa té 300 treballadors. Considerem la variable aleatòria que ens mesura el nombre de treballadors que estan malalts un dia concret. Calcula
   a) La esperança matemàtica (nombre mitjà de treballadors malalts) i la desviació típica de la distribució corresponent.
   b) Quina és la probabilitat que el nombre de malalts sigui inferior a 50 persones?

(1+1=2 punts)

Nom: **Grup:**

1. En una loteria popular hi ha 1.000 números. Es rifa un número que guanya 5.000 €. L'anterior i el següent guanyen 1.000 €. Tots els que tenen la mateixa terminació que el guanyador s'emporten 10 € (el del 1r premi també) i la resta res. Considerem la variable aleatòria X = "premi obtingut per una persona que jugui un número".
   a) Calcula la distribució de probabilitat corresponent. És a dir, omple la 2a columna de quadre adjunt.
   b) **Sense utilitzar les tecles d'estadístiques de la calculadora,** calcula la esperança matemàtica (m) i la desviació tipus (s) d'aquesta distribució.

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$(x_i)^2$	$(x_i)^2 \cdot p_i$
5.000 €	1/1000=0.001	5	25.000.000	25.000
1.000€	2/1000=0.002	2	1.000.000	2.000
10 €	100/1000=0.1	1	100	10
0 €	897/1000=0.897	0	0	0
Sumes	1	8		27010

Així doncs $m = \sum_i x_i \cdot p_i$ = 8, $s^2 = \sum_i \left((x_i)^2 \cdot p_i \right) - m^2$ =27.010 – 64= 26.946

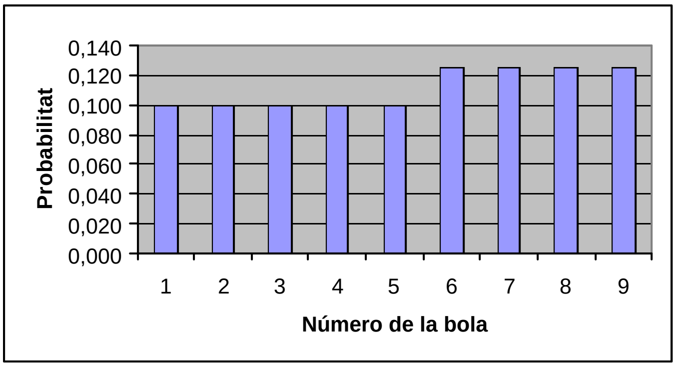
i la $s = \sqrt{s^2}$ =164.15

(0,5+0,75+0,75=2 punts)

2. En una urna **A** hi ha 5 boles numerades de l'1 al 5 i en una altra urna **B** hi ha 4 boles numerades del 6 al 9. Es llança una moneda: si surt cara es treu una bola de A, i si surt creu, es treu de B. S'observa el nombre de la bola.
   a) Fes la taula de la distribució de probabilitat associada a aquesta variable aleatòria.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	suma
p_i	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=$ =0,1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=$ =0,1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=$ =0,1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=$ =0,1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=$ =0,1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ =0,125	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ =0,125	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ =0,125	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ =0,125	1

   b) Representa-la gràficament.



   c) Calcula m i s (**pots fer servir la calculadora**)

m =5.25 i s =2.586020108

(0,75+0,5,+1=2,25 punts)

3. En una certa població la probabilitat de néixer noia és del 0,6. Si una família té 6 fills calculeu:

   Considerem la variable aleatòria X = "nombre de **nois** que té la família". Aquesta variable aleatòria segueix una distribució normal de paràmetres n=6 i p=0,4. És a dir X és una B(n=6,p=0,4). Aleshores ara ja podem traduir les preguntes fent servir aquesta variable aleatòria

   a) La probabilitat que tingui exactament 4 noies.

   P(X=2)= $\binom{6}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^4$ =0.3110

   b) La probabilitat que no tingui cap noi.

   P(X=0)= $\binom{6}{0} 0,6^6$ =0.046656 $\simeq$ 0.0467

(0,75+0,75=1,5 punts)

4. Les estatures dels individus d'una població es distribueixen normalment amb una mitjana de 175 cm i una desviació típica de 10 cm. Calcula la probabilitat que:

   La variable aleatòria X= "altura d'un individu concret" segueix una distribució N(m =175, s =10)

   Per poder utilitzar la taula de la N(0,1) tipificarem la variable i considerarem

   $$Z = \frac{X-m}{s} = \frac{X-175}{10}$$

   a) Un individu tingui una estatura major de 180 cm.

   P(X>180)=P $\left(\frac{X-175}{10} > \frac{180-175}{10}\right)$ = P(Z>0,5)=1–P(Z≤0.5)=1–0.6915=0.3085

   b) Un individu tingui una estatura menor de 170 cm.

   P(X<170)=P $\left(\frac{X-175}{10} > \frac{170-175}{10}\right)$ = P(Z<-0,5)= P(Z>0,5)=1–P(Z≤0.5)= =1–0.6915=0.3085

   c) Quina proporció d'individus té una estatura compresa entre 170 i 180 cm?

   P(170<X<180)=P $\left(\frac{170-175}{10} < \frac{X-175}{10} < \frac{180-175}{10}\right)$ = P(–0,5<Z<0,5)= =P(Z≤0,5)– P(Z≤–0,5)= 2 P(Z≤0,5) – 1 = 2 · 0.6915 –1 = 0.383

   Per tant entre aquestes alçades hi ha el 38,3 % de la població

(0,75+0,75+0,75=2,25 punts)

5. Experimentalment una empresa ha vist que la probabilitat de un treballador estigui malalt un dia concret és del 0,2. Si l'empresa té 300 treballadors. Considerem la variable aleatòria que ens mesura el nombre de treballadors que estan malalts un dia concret. Calcula

   a) La esperança matemàtica (nombre mitjà de treballadors malalts) i la desviació típica de la distribució corresponent.

   Aquesta variable aleatòria X és una variable aleatòria discreta que segueix una distribució B(n=300, P=0,2)

   Per tant m =n·p=300·0,2= 60 treballadors i

   $$s = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{300\,0{,}2\,0{,}8} = \sqrt{48} = 6.9282$$

b) Quina és la probabilitat que el nombre de malalts sigui inferior a 50 persones?

Hem de calcular P(X<50), però com són molts càlculs
P(X<50)= P(X=0)+ P(X=1)+.... P(X=49)
mirem si podem aproximar aquesta distribució per una altre més fàcil de calcular

Com n·p = 200 · 0,2= 40 >5 i n· q= 300 · 0,8 >5 podem aproximar aquesta distribució amb una Normal de paràmetres m i s .

Així doncs considerem que aproximar la la nostra variable X per una variable Y que és una N (m =60, s =6.9282) que després tipifiquem amb $Z = \frac{Y-60}{6,9282}$ per utilitzar la taula de la N(0,1)

P(X< 50) = P (Y$\leq$49,5)= P$\left(\frac{Y-60}{6,9282} \leq \frac{49,5-60}{6,9282}\right)$= P(Z$\leq$–1.5155)=1– P(Z$\leq$1.5155)= $\simeq$ 1– P(Z$\leq$1.52)=1 –0.9357=0.0643

(1+1=2 punts)