Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
Ampliació de matemàtiques
Operacions i límits entre successions

Nom: **Grup:**

1. Raona la certa o falsedat de les afirmacions següents:
   a) Tota successió té límit quan n tendeix a $+\infty$
   b) Una successió creixent mai pot tenir per límit un nombre real, sempre té per límit $+\infty$

(0,5 punts)

2. Per a cada apartat escriu el terme general de una successió que compleixi la condició demanada.
   a) Una successió (no constant) que tingui límit –5.
   b) Una successió que tingui límit 0^-
   c) Una successió alternada i que tingui límit 0
   d) Una successió alternada i que sigui divergent. [Recorda que diem que una successió és divergent quan els seus termes, en valors absolut, tenen per límit $+\infty$]

(1 punt)

3. A partir de quin terme de la successió $a_n = \dfrac{14n+2008}{7n}$ els seus termes disten de 2 en menys d'una mil·lèsima?

(2 punts)

4. A partir de quin terme de la successió $a_n = -2n + 1000$ els seus termes es fan més petits que menys un milió?

(1 punt)

5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -3$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \dfrac{1}{5}$ calcula els límits de cada una de les successions següents, o bé indica que es tracte d'un cas d'indeterminació:
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) =$
   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) =$
   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot c_n) =$
   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n \cdot c_n) =$
   e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{c_n}\right) =$
   f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{c_n}{b_n}\right) =$
   g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{b_n}{c_n}\right) =$
   h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(d_n)^{a_n}\right] =$
   i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(d_n)^{c_n}\right] =$

(4.5 punts)

6. Demostra que $\dfrac{\infty}{\infty}$ és un indeterminació. És a dir cal que donis uns exemples (com a mínim dos) de successions tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty$ però de forma tal que el $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sigui diferent en cada exemple que donis.

(1 punt)

Nom: **Grup:**

1. Raona la certa o falsedat de les afirmacions següents:
   a) Tota successió té límit quan n tendeix a $+\infty$

   Fals. Per exemple: 2,0,2,0,2,0,2,...... és a dir $a_n = \begin{cases} = 2 \;\; per \;\; n \;\; senar \\ = 0 \;\; per \;\; n \;\; parell \end{cases}$

   b) Una successió creixent mai pot tenir per límit un nombre real, sempre té per límit $+\infty$

   Fals. Per exemple $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ és una successió creixent i $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2$

(0,5 punts)

2. Per a cada apartat escriu el terme general de una successió que compleixi la condició demanada.
   a) Una successió (no constant) que tingui límit –5.

   Per exemple $a_n = -5 + \dfrac{1}{n}$

   b) Una successió que tingui límit 0^-

   Per exemple $a_n = -\dfrac{1}{n}$

   c) Una successió alternada i que tingui límit 0

   Per exemple $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

   d) Una successió alternada i que sigui divergent. [Recorda que diem que una successió és divergent quan els seus termes, en valors absolut, tenen per límit $+\infty$]

   Per exemple $a_n = (-1)^n n$

(1 punt)

3. A partir de quin terme de la successió $a_n = \dfrac{14n+2008}{7n}$ els seus termes disten de 2 en menys d'una mil·lèsima?

   Cal trobar un lloc n_0 a partir del qual $\forall$ n> n_0 2–0,001< a_n <2+0,001;

   $1{,}999 < \dfrac{14n+2008}{7n} < 2{,}001$ la qual cosa escrita com sistema d'inequacions és:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}999 < \dfrac{14n+2008}{7n} \\ \dfrac{14n+2008}{7n} < 2{,}001 \end{array}\right\} \text{com } 7n>0 \text{ podem multiplicar i queda } \left.\begin{array}{r} 13{,}993n < 14n+2008 \\ 14n+2008 < 14{,}007n \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}007n < 2008 \\ -0{,}007n < -2008 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} n > \dfrac{2008}{-0{,}007} \\ n > \dfrac{-2008}{-0{,}007} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} n > -286857.1429 \\ n > 286857.1429 \end{array}\right\} n > 286857.429$$

   és a dir a partir de la posició n_0=2.868.571

(2 punts)

4. A partir de quin terme de la successió $a_n = -2n + 1000$ els seus termes es fan més petits que menys un milió?

Cal trobar un lloc n_0 a partir del qual $\forall n > n_0$ $a_n < -1000000$

$-2n + 1000 < -1000000$

$-2n < -1001000$

$$n > \frac{-1001000}{-2}$$

$n > 500500$

Per tant és a partir del lloc $n_0 = 500500$

(1 punt)

5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -3$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{5}$ calcula els límits de cada una de les successions següents, o bé indica que es tracte d'un cas d'indeterminació:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) =$ Indeterminació

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot c_n) = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n \cdot c_n) = 0^+$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{c_n}{b_n}\right) = +\infty$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{b_n}{c_n}\right) = 0^+$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(d_n)^{a_n}\right] = 0^+$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(d_n)^{c_n}\right] = 125$

(4.5 punts)

6. Demostra que $\frac{\infty}{\infty}$ és un indeterminació. És a dir cal que donis uns exemples (com a mínim dos) de successions tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty$ però de forma tal que el $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sigui diferent en cada exemple que donis.

Exemple 1:

$a_n = 7n \to +\infty$; $b_n = n \to +\infty$ i en aquest cas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{7n}{n} = 7 \to 7$

Exemple 2:

$a_n = 7n^2 \to +\infty$; $b_n = n \to +\infty$ i en aquest cas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{7n^2}{n} = 7n \to +\infty$

Exemple 3:

$a_n = n \to +\infty$; $a_n = n^2 \to +\infty$ i en aquest cas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0^+$

(1 punt)