



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les corbes
$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = 3x \end{array} \right\}$$

- Feu el dibuix de la regió corresponent del pla limitada per aquestes dues corbes
- Calculeu la seva àrea
- Si revolucioneu aquesta regió al voltant de la recta $Y=6$ obtenim un cos de revolució. Quin és el volum d'aquest cos?

(0,5+1+1,5=3 punts)

- 2) **Utilitzant els mètode de Gauss** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \end{array} \right.$$

(5.5 punts)

- 3) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu la matriu X tal que $X(A+B) = N M$

(1,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les corbes
$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = 3x \end{array} \right\}$$

- Feu el dibuix de la regió corresponent del pla limitada per aquestes dues corbes
- Calculeu la seva àrea
- Si revolucioneu aquesta regió al voltant de la recta $Y=6$ obtenim un cos de revolució. Quin és el volum d'aquest cos?

(0,5+1+1,5=3 punts)

$y = 3x$ és una recta
 $y = x^3 - x$ és una cúbica que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 talla $y=0$ en
 $\left. \begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^3 - x = 0 \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}$

trobant els punts de tall entre elles

$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ y = x^3 - x \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^3 - x = 3x \\ x^3 - 4x = 0 \\ x(x^2 - 4) = 0 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{array}$

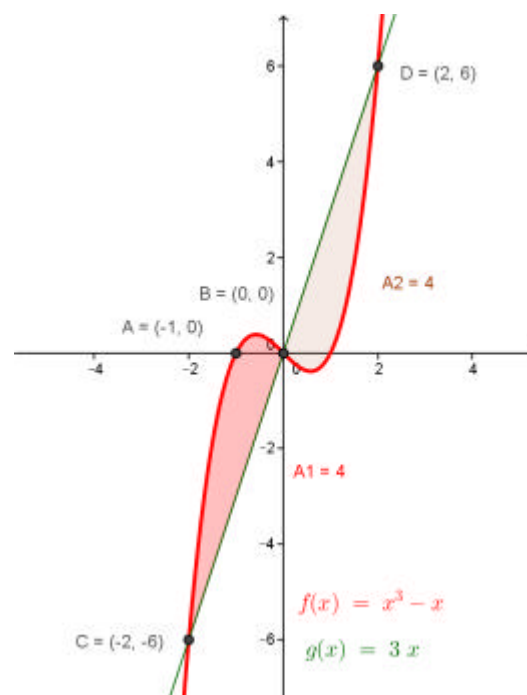
Amb aquests valors la gràfica és clara

$$y = 3x$$

x	y
-2	-6
0	0
2	6

$$y = x^3 - x$$

x	y
-2	-6
0	0
-1	0
1	0
2	6



b)

$$A = \int_{-2}^0 (x^3 - x) - 3x \, dx + \int_0^2 3x - (x^3 - x) \, dx =$$

0 per simetria respecte l'eix ~~ox~~ ($x=0$)

$$A = 2 \int_0^2 3x - (x^3 - x) \, dx = 2 \int_0^2 4x - x^3 \, dx =$$

$$= 2 \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2 \left[8 - \frac{16}{4} - 0 \right] = 2 \cdot 4 = 8 \, u^2$$

c) Per tal que l'eix de revolució sigui $y=0$
 Cal desplaçar $y=6$ fins $y=0 \Rightarrow$ TOT.
 s'ha de baixar 6 UNITATS respecte $y \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ les FUNCIONS NOVES són

$$y = x^3 - x - 6$$

$$y = 3x - 6$$

$$y = 6 - 6 = 0$$

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-2}^0 (3x-6)^2 - (x^3-x-6)^2 \, dx +$$

$$+ \pi \int_0^2 (x^3-x-6)^2 - (3x-6)^2 \, dx$$

$\rightarrow$ Aquí hi ha una Nca d'operacions però cap complicació
 $(x^3 - x - 6)^2 = (x^3 - x - 6)(x^3 - x - 6) =$
 $= x^6 - x^4 - 6x^3 - x^4 + x^2 + 6x - 6x^3 + 6x + 36 = x^6 - 2x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 36$

$\text{I com } (3x - 6)^2 = 9x^2 - 36x + 36$

El que queda després de cada integral és això però en una positiva i en l'altra negativa, per exemple en la 1a

$\rightarrow -x^6 + 2x^4 + 12x^3 + 8x^2 - 48x$

$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-2}^0 -x^6 + 2x^4 + 12x^3 + 8x^2 - 48x \, dx +$

$+ \pi \int_0^2 x^6 - 2x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 48x \, dx =$

$= \pi \left[\left[\frac{-x^7}{7} + \frac{2}{5}x^5 + 3x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 24x^2 \right]_{-2}^0 + \right.$

$\left. + \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} - 3x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 24x^2 \right]_0^2 \right] =$

$= \pi \left[0 - \left(\frac{128}{7} - \frac{64}{5} + 48 - \frac{64}{3} - 96 \right) + \left(\frac{128}{7} - \frac{64}{5} - 48 - \frac{64}{3} + 96 \right) \right] =$

$= \pi \left[\frac{6704}{105} + \frac{3376}{105} \right] = 96\pi \, \mu^3$

- 2) **Utilitzant els mètode de Gauss** discutiu i resolcu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

(5.5 punts)

② $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2 \leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array} \right)$

$F2 - mF1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^2 & 1-m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array} \right)$
 $F3 - F1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^2 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m & 0 \end{array} \right)$

$$1-m^2 = (1-m)(1+m)$$

Així doncs hi ha 3 casos

CAS I $\forall m \neq 1, -1$ tenim que $\begin{matrix} \text{Rang}(A)=3 \\ \text{Rg}/\text{Ampl}=3 \\ \text{N}^{\circ} \text{INC}=3 \end{matrix} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$\Rightarrow$ en S.C.D

I la solució s'obté aïllant en cascada

$$F3 \Rightarrow z = \frac{0}{1-m} = 0$$

$$F2 \Rightarrow (1-m^2)y = 1-m - (1-m^2)z$$

$$(1-m^2)y = 1-m$$

$$y = \frac{(1-m)}{(1-m)(1+m)} = \frac{1}{1+m}$$

$$F1 \Rightarrow mx = 1 - y - z$$

$$mx = 1 - \frac{1}{1+m} = \frac{1+m-1}{1+m} = \frac{m}{1+m}$$

$$x = \frac{m}{(1+m)m} = \frac{1}{1+m}$$

$\Rightarrow$ LA SOLUCIÓ és $x = \frac{1}{1+m}$ $y = \frac{1}{1+m}$; $z = 0$

CAS II $m = 1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Rg}(A) = 1 \\ \text{Rg}(A_{\text{red}}) = 1 \\ \text{N}^{\circ} \text{INC} = 3 \end{array} \right\} \text{S.C.} \left\{ \begin{array}{l} \text{S.C.I amb 2 graus de} \\ \text{llibertat} \end{array} \right.$

Podem agafar com a lliures dos qualsevol
ja que queda explicat.

Per exemple considerem

x — Com incògnita PRINCIPAL

y, z — Com incògnites LLIBRES o PARÀMETRES

$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \middle| 1 - y - z \right) \Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{array} \right\} \forall y, z \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right. \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

CAS III $m = -1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Arreu la $P2 \Rightarrow \text{S.I.}$

o mirant el Rang també ja que

$\left. \begin{array}{l} \text{Rg}(A) = 2 \\ \text{Rg}(A_{\text{red}}) = 3 \end{array} \right\} > \text{S.I.}$

3) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu la matriu X tal que $X(A+B) = N \cdot M$

(1,5 punts)

③ $X \cdot (A+B) = N \cdot M$

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ si $\exists (A+B)^{-1}$ això està fet:

$$X = (N \cdot M) \cdot (A+B)^{-1}$$

Intentem calcular la $(A+B)^{-1}$ per GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F1 - 2F2 \\ F3 - \frac{3}{2}F1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{F1}{2} \\ F2 \cdot 2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = N \cdot M \cdot (A+B)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

✓ Segon l'ordre en que multipliquem

$$= \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ 33 & -17 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ 33 & -17 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ 33 & -17 \end{pmatrix}$$