



Nom:

Grup:

1.- Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{9x^2 + 7}}{x + 7} - \frac{6x^2 - 6}{\sqrt[3]{x^6 + 3x - 49}} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{2}{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{20})}{x^2}$

(1+0,5+1+0,5= 3 punts)

2.- Demostreu que l'equació $2^x = 3x^3$ té almenys una solució real i aproximeu una d'elles amb un precisió d'un decimal.

(0,5 punts)

3.- Calculeu "a", "b" i "c" per a què la funció $f(x)$ sigui contínua a tot $\mathbb{R}$ i derivable en el major nombre de punts.

$$f(x) = \begin{cases} = x^2 + ax & \text{si } x < -1 \\ = x^3 - 3x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ = bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(1,5 punts)

4.- Donada la corba $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$

a) Trobeu els punts d'intersecció amb la recta $x=0$

b) Trobeu la recta tangent i la normal a la corba en un d'aquests punts.

(1,5 punts)

5.- Deriveu les funcions següents:

a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ i simplifiqueu el resultat

b) $f(x) = [\cos(x)]^{\sin(x)}$

(1,25*2=2,5 punts)

6.- Trobeu la derivada d'ordre $n \forall n \in \mathbb{N}$ de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ i demostreu-la per inducció.

(1 punt)



Nom: _____

Grup: _____

1.- Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{9x^2 + 7}}{x + 7} - \frac{6x^2 - 6}{\sqrt[3]{x^6 + 3x - 49}} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{2}{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{20})}{x^2}$

(1+0,5+1+0,5= 3 punts)

① a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4}} = \sqrt{\frac{12 - 6 - 6}{4 - 4}} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$

Però que podem reduir-la de dues formes diferents:

1a) Simplificant el factor $(x-2)$ del numerador i denominador de la fracció

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 3 \quad -3 \quad -6} \\ \underline{3 \quad 3 \quad 6} \\ 0 \end{array} \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = (x-2)(3x+3)$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Per tant el límit demanat és

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{(x-2)(3x+3)}{(x-2)(x+2)}} = \sqrt{\frac{6+3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

2a) Aplicant l'HÔPITAL

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4}} = \frac{0}{0} \text{ L'HÔP.}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 3}{2x}} = \sqrt{\frac{12 - 3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{9x^2 + 7}}{x + 7} - \frac{6x^2 - 6}{\sqrt[3]{x^6 + 3x - 49}} \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{9x^2}}{x} - \frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} - \frac{6x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 6 = -3$$

$$C1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{2}{x}} = 1^{\infty} \text{ INO.}$$

que podem solucionar de duas maneiras

C.1) fabricant el NOMBRE e

$$\text{BASE} = 1 + \sin x = \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} \right]$$

per tant el límit demanat és

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} \right)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{2}{x} \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{2 \sin x}{x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{1}} = e^2 \end{aligned}$$

INO. $\frac{0}{0}$ a l'ap.
L'HÔP.

C.2) Aplicant ln per aplicar L'HÔPITAL

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \ln(1 + \sin x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + \sin x)}{x} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{1}{1 + \sin x} \cos x}{1} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2 \quad \text{L'HÔPITAL} \\ \Rightarrow \ln L = 2 &\Rightarrow \boxed{L = e^2} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{20})}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

• El podem fer per $\Theta(\infty)$ ja que
 Com $\Theta(\ln(x^{20})) < \Theta(x^m)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{20})}{x^2} = 0^+$$

• O Per L'HÔPITAL

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{20})}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20 \ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'HÔP}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20 \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20}{x^2} = \frac{10}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

2.- Demostreu que l'equació $2^x = 3x^3$ té almenys una solució real i aproximeu una d'elles amb un precisió d'un decimal.

(0,5 punts)

② Cal veure que $2^x - 3x^3 = 0$ té alguna solució

Considerem $f(x) = 2^x - 3x^3$ que és cont en $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ també ho és en $[a, b] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

I com $\left. \begin{aligned} f(0) &= 2^0 - 0 = 1 - 0 > 0 \\ f(1) &= 2 - 3 = -1 < 0 \\ f(x) &\text{ cont en } [0, 1] \end{aligned} \right\} \text{T. del BOLZANO} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in (0, 1) \text{ t.q. } f(x) = 0$

Ana per aproximar la solució a un decimal hem de reduir l'amplitud de l'interval.

on apliquem Balzano

$$f(0) > 0$$

$$f(0,5) > 0$$

$$f(0,8) > 0$$

$$f(0,9) < 0$$

$$f(1) < 0$$

$$f(x) \text{ cont en } [0,8, 0,9]$$

$$\begin{aligned} T.B & \Rightarrow \exists \alpha \in (0,8, 0,9) \\ & \text{tq } f(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha \approx 0,8}$$

3.- Calculeu "a", "b" i "c" per a què la funció f(x) sigui contínua a tot R i derivable en el major nombre de punts.

$$f(x) = \begin{cases} = x^2 + ax & \text{si } x < -1 \\ = x^3 - 3x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ = bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(1,5 punts)

③ f(x) és clarament contínua i derivable en $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} = 2x + a & \text{si } x < -1 \\ = 3x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ = b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -1$ és CONTÍNUA (F) doncs iguals

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 3 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + ax) = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - 3x) = -1 + 3 = 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &1 - a = 2 \\ &\boxed{a = -1} \end{aligned}$$

En $x = 2$ és CONTÍNUA (F) doncs igual

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 - 6 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 3x) = 8 - 6 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx + c) = 2b + c \end{aligned} \quad \boxed{2b + c = 2}$$

Derivable en $x = -1$ $\Leftrightarrow$ é contínua ($a = -1$) i
 a més $f'(-1^-) = f'(-1^+)$
 $2(-1) + a = 3(-1)^2 - 3$ ✓
 $-2 - 1 = 3 - 3$
 $-3 = 0 \Rightarrow$ NO é derivable
 en $x = -1$

Derivable en $x = 2$ $\Leftrightarrow$ ha de ser CONT
 en $x = 2$ ($2b + c = 2$)

i a més $f'(2^-) = f'(2^+)$
 $3(2)^2 - 3 = b$
 $12 - 3 = b$
 $\boxed{9 = b}$ i $\boxed{c = -16}$

$2 \cdot 9 + c = 2$
 $c = 2 - 18$

CONCLUSIÓ

$f(x)$ é CONT a $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2b + c = 2 \end{cases}$

$f(x)$ é derivable a $\mathbb{R} - \{-1\}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 9 \\ c = -16 \end{cases}$

$a \neq -1 \Rightarrow$ No é CONT en $x = -1$

$a = -1 \Rightarrow$ é CONT en $x = -1$ però no é derivable

Si $2b + c = 2 \Rightarrow$ é CONT en $x = 2$

$\left. \begin{array}{l} \text{I si a més} \\ b = 9 \\ c = -16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{é també} \\ \text{derivable} \\ \text{en } x = 2 \end{array}$

4.- Donada la corba $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$

a) Trobeu els punts d'intersecció amb la recta $x=0$

b) Trobeu la recta tangent i la normal a la corba en un d'aquests punts.

(1,5 punts)

④ a)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 2y &= 15 \\ x &= 0 \\ y^2 - 2y - 15 &= 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$(0, 5) ; (0, -3)$

b) Trobarem la tangent i la normal en $(0, 5)$
Cal trobar el pendent i per això necessito la y'

deriva implícitament

$$2x + 2y y' - 6 - 2y' = 0$$

$$(2y - 2) y' = 6 - 2x$$

$$y' = \frac{6 - 2x}{2y - 2} \quad \text{o simplificant} \quad y' = \frac{3 - x}{y - 1}$$

Pendent de la tangent en $(0, 5)$ és

$$m = y'_{(0,5)} = \frac{6}{10 - 2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Pendent de la normal en $(0, 5) = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

RECTA TANGENT
en $(0, 5)$

$$y - 5 = \frac{3}{4} x$$

$$4y - 3x - 20 = 0$$

RECTA NORMAL
en $(0, 5)$

$$y - 5 = -\frac{4}{3} x$$

$$3y + 4x - 15 = 0$$

5.- Deriveu les funcions següents:

a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ i simplifiqueu el resultat

b) $f(x) = [\cos(x)]^{\sin(x)}$

(1,25*2=2,5 punts)

5 a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$$f(x) = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-1}{1-x^2}$$

b) $y = (\cos x)^{\sin x}$

$$\ln y = \ln (\cos x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ln(\cos x)$$

Ara derivo de la meitat.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln(\cos x) + \frac{\sin x (-\sin x)}{\cos x}$$

$$y' = \left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] (\cos x)^{\sin x}$$

6.- Trobeu la derivada d'ordre $n \forall n \in \mathbb{N}$ de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ i demostreu-la per inducció.

(1 punt)

⑥

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = (-1) x^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2) x^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3) x^{-4}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} (-1)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dem per inducció

$$n=1 \text{ Val } 1^a \text{ que } f'(x) = \frac{1!}{x^2} (-1)^1 = \frac{-1}{x^2}$$

$$\underline{n \Rightarrow n+1} \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} (-1)^n = n! (-1)^n x^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (-1)(n+1) x^{-(n+1)-1} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{(n+2)}} \quad \underline{\underline{\text{Val}}}$$