



Nom:

Grup:

1.- Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 10x^2 - 5x + 10}{x^2 - x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$

(1+0,5+1+0,5= 3 punts)

2.- Demostreu que l'equació $2 \sin(x^2) + 3 = e^x$ té almenys una solució real i
aproximeu una d'elles amb un precisió d'un decimal (x en radians)

(0,5 punts)

3.- Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x)$ per als diferents valors del paràmetre "m".

$$f(x) = \begin{cases} = 3 - m x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ = \frac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(1,5 punts)

4.- Donada la hipèrbola $-21x^2 + 12xy + 43y^2 + 63x - 193y + 84 = 0$

a) Trobeu els punts d'intersecció amb l'eix OX

b) Trobeu la recta tangent i la normal a la corba en un d'aquests punts.

(1,5 punts)

5.- Deriveu les funcions següents:

c) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ i simplifiqueu el resultat

d) $f(x) = \left[\ln(3x^2) \right]^{\sqrt[3]{x}}$

(1,25*2=2,5 punts)

6.- Trobeu la derivada d'ordre $n \forall n \in \mathbb{N}$ de la funció $f(x) = \ln(1+x)$ i demostreu-la per inducció.

(1 punt)



Nom: _____

Grup: _____

1.- Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 10x^2 - 5x + 10}{x^2 - x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$

(1+0,5+1+0,5= 3 punts)

①

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 10x^2 - 5x + 10}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0}$ Indeterminació

Però podem solucionar-la de dues maneres

a.1) simplificant el factor $(x-2)$ del numerador i del denominador de la fracció

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & -10 & -5 & 10 \\ & & 10 & 0 & 10 \\ \hline & 5 & 0 & -5 & 0 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x^3 - 10x^2 - 5x + 10 = \\ = (x-2)(5x^2 - 5) \end{array} \right\} = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -2 & \\ & & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - x - 2 = \\ = (x-2)(x+1) \end{array} \right\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 10x^2 - 5x + 10}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(5x^2 - 5)}{(x-2)(x+1)} = \frac{15}{3} = 5$$

a.2) per L'HÔPITAL

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 10x^2 - 5x + 10}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'HÔP}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{15x^2 - 20x - 5}{2x - 1} =$$

$$= \frac{15 \cdot 4 - 20 \cdot 2 - 5}{4 - 1} = \frac{60 - 45}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'HÔP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'HÔP}}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(\frac{8 - 2 - 1}{5} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \text{ IND}$

que podem solucionar de dues maneres

C.1) fabricant el Número e

$$\text{Base} = 1 + \frac{2x^2 - x - 1}{7 - x} - 1 = 1 + \frac{2x^2 - x - 1 - 7 + x}{7 - x} =$$

$$= 1 + \frac{2x^2 - 8}{7 - x} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{7-x}{2x^2-8}\right)}$$

$$\text{Tot el limit} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{7-x}{2x^2-8}\right)} \right]^{\left(\frac{7-x}{2x^2-8}\right) \left(\frac{1}{x-2}\right) \left(\frac{2x^2-8}{7-x}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{(x-2)(7-x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(7-x)}} = e^{\frac{8}{5}}$$

C.2) Aplicant ln al limit, i l'Hôpital

$$S) L = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2x^2 - x - 1}{(7-x)} \right]^{\frac{1}{x-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\ln \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(\frac{2x^2 - x - 1}{7-x} \right)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x^2 - x - 1) - \ln(7-x)}{x-2} =$$

$$= \frac{\ln 5 - \ln(5)}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'Hôp.}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{4x-1}{2x^2-x-1} - \frac{-1}{7-x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-1}{2x^2-x-1} + \frac{1}{7-x} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\ln L = \frac{8}{5} \Rightarrow L = e^{\frac{8}{5}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

d.1) treballant amb $\Theta(\infty)$ sabem sabem que
 $\Theta(e^x) > \Theta(x^n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = +\infty$$

d.2) per L'HÔPITAL ^{L'HÔP}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'HÔP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

2.- Demostreu que l'equació $2 \sin(x^2) + 3 = e^x$ té almenys una solució real i
 aproximeu una d'elles amb un precisió d'un decimal (x en radians)

(0,5 punts)

$$② \quad 2 \sin(x^2) + 3 - e^x = 0$$

o que $f(x) = 2 \sin(x^2) + 3 - e^x$ que és cont. a $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ també cont. en $[a, b]$

$$f(0) = 3 - e^0 = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$f(1) = 2 \sin(1) + 3 - e^1 = 1,96 > 0$$

$$f(2) = 2 \sin(4) + 3 - e^2 = -5,90 < 0$$

$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 > 0 \\ f(1) = 1,96 > 0 \\ f(2) = -5,90 < 0 \end{array} \right\} \text{T. BOLZANO} \Rightarrow$

$f(x)$ cont. en $[1, 2]$

$\Rightarrow \exists \alpha \in (1, 2) \text{ t.q. } f(\alpha) = 0$

Per aconseguir la precisió d'un decimal necessitem
 un interval més petit

$$f(1,5) = 0,074 > 0$$

$$f(1,6) = -0,85 < 0$$

$f(x)$ cont. en $[1,5, 1,6]$

T. BOLZANO

$\exists \alpha \in (1,5, 1,6)$
 t.q. $f(\alpha) = 0$

$$\boxed{\alpha \approx 1,5}$$

3.- Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x)$ per als diferents valors del paràmetre "m".

$$f(x) = \begin{cases} = 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ = \frac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(1,5 punts)

③ Sabem que és CONT i derivable donant en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ i que

$$f'(x) = \begin{cases} = -2mx & \text{si } x < 1 \\ = \frac{2}{m} (-1) x^{-2} = \frac{-2}{mx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ara estudiem que pot passar a $x=1$

CONT en $x=1$? $\Leftrightarrow$ són iguals.

$$f(1) = 3 - m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - mx^2 = 3 - m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{mx} = \frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow 3 - m = \frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow 3m - m^2 = 2$$

$$0 = m^2 - 3m + 2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ o } m = 2$$

Ara anem a estudiar la derivabilitat en $x=1$

Deriv en $x=1$ comença de ser continua només

tenim? com.

• Si $m=1 \Rightarrow f'(1^-) = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2 \Rightarrow$ en $x=1$
 $f'(1^+) = \frac{-2}{1 \cdot 1^2} = -2$

• Si $m=2 \Rightarrow f'(2^-) = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8 \Rightarrow$ No és deriv. en $x=1$
 $f'(2^+) = \frac{-2}{2 \cdot 2^2} = \frac{-1}{4}$

CONCLUSIO

- $m=0$ $f(x)$ en CONT en $(-\infty, 1]$ i derivable en $(-\infty, 1)$
- $m \neq 1, 2$ CONT i derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$
- $m=1$ CONT i derivable en $\mathbb{R}$
- $m=2$ CONT en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

ATENCIÓ: Si $m=0$
 DONANT $f = (-\infty, 1]$
 CONT en $(-\infty, 1]$
 i deriv en $(-\infty, 1)$

4.- Donada la hipèrbola $-21x^2 + 12xy + 43y^2 + 63x - 193y + 84 = 0$

a) Trobeu els punts d'intersecció amb l'eix OX

b) Trobeu la recta tangent i la normal a la corba en un d'aquests punts.

(1,5 punts)

$$\textcircled{4} \begin{cases} -21x^2 + 12xy + 43y^2 + 63x - 193y + 84 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -21x^2 + 63x + 84 = 0$$

$$-3x^2 + 9x + 12 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

PTS son $(-1,0)$ i $(4,0)$

Trobarem la TANGENT i normal per exemple en el pt $(-1,0)$

$m = y'_{(-1,0)}$ però per obtenir y' hem de derivar implícitament

$$-42x + 12(y + xy') + 43 \cdot 2y y' + 63 - 193y' = 0$$

$$y'(12x + 86y - 193) = 42x - 12y - 63$$

$$y' = \frac{42x - 12y - 63}{12x + 86y - 193} \Rightarrow m = y'_{(-1,0)} = \frac{-42 - 63}{-12 - 193} = \frac{105}{205}$$

$$m = \frac{21}{41} \Rightarrow \text{Recta tangent en } (-1,0) \quad y = \frac{21}{41}(x+1)$$

$$m_{\perp} = \frac{-1}{\frac{21}{41}} = -\frac{41}{21} \Rightarrow \text{Recta Normal en } (-1,0) \quad y = -\frac{41}{21}(x+1)$$

$$21x - 41y + 21 = 0$$

$$41x + 21y + 41 = 0$$

Si les haguéssim fet a l'altre pt $(4,0)$ serien

$$\text{TANGENT} \quad -21x - 29y + 84 = 0$$

$$\text{NORMAL} \quad 29x - 21y - 116 = 0$$

5.- Deriveu les funcions següents:

a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ i simplifiqueu el resultat

b) $f(x) = [\ln(3x^2)]^{\sqrt[3]{x}}$

(1,25*2=2,5 punts)

5 a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1-x + (1+x)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{1^2 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2} = \frac{2}{2 + 2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

b) $y = [\ln(3x^2)]^{\sqrt[3]{x}}$ *fun derivar logarítmica*
Apliquem ln als dos membres
I per les propietats dels logaritmes

$$\ln y = \sqrt[3]{x} \ln(\ln(3x^2))$$

Ara derivo els dos membres

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{3} x^{-2/3} \ln(\ln(3x^2)) + x^{1/3} \cdot \frac{2}{\ln(3x^2) \cdot 2x}$$

$$y' = \left[\frac{\ln(\ln(3x^2))}{3 \sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2} \times \ln(3x^2)} \right] y$$

$$y' = \left[\frac{\ln(\ln(3x^2))}{3} + \frac{2}{x \ln(3x^2)} \right] \frac{[\ln(3x^2)]^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

- 6.- Trobeu la derivada d'ordre $n \forall n \in \mathbb{N}$ de la funció $f(x) = \ln(1+x)$ i demostreu-la per inducció.

(1 punt)

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2} \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Dem. per inducció

Val per $n=1$ $f'(x) = \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x} \quad \underline{\text{SI}}$

SI val per $n \Rightarrow$ val per $n+1$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot (-n) (1+x)^{-n-1} =$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1-1} (n+1-1)!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow \underline{\text{SI}}$$