Nom: **Grup:**

1.- Defineix la funció y= arctan (x), dibuixa la seva gràfica, indica quin és el seu domini, el seu recorregut i si té asímptotes indica quines són.

(1,5 punts)

2.-

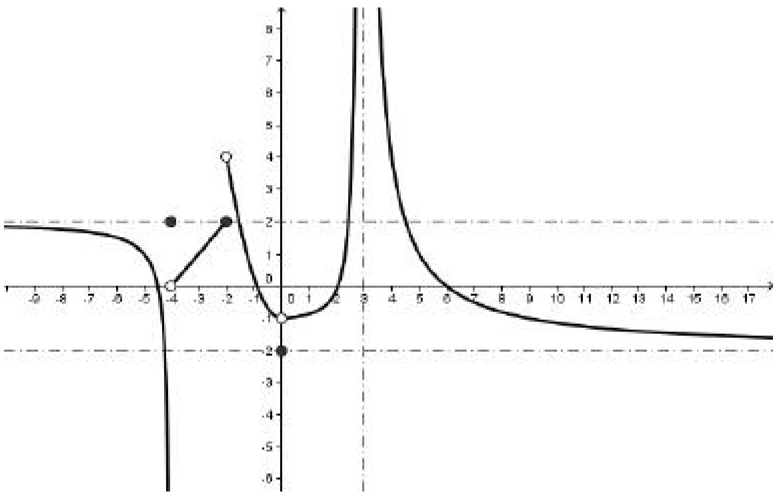
a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Demostra que l'equació $x^3 = 2^x$ té, almenys, una solució real entre 1 i 2 i calcula una aproximació seva fins les dècimes.

(1,5 punts)

3.- Considera la gràfica de la funció **Y = f(x)**

- Calcula els límits següents:



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

c) $\lim_{x\to-4^-} f(x) =$

d) $\lim_{x\to-4^+} f(x) =$

e) $\lim_{x\to-4} f(x) =$

f) $\lim_{x\to-2^-} f(x) =$

g) $\lim_{x\to-2^+} f(x) =$

h) $\lim_{x\to3} f(x) =$

i) $\lim_{x\to0} f(x) =$

- Indica en quins punts **Y = f(x)** no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

(0,1·9 +0,6=1,5 punts)

4.- Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & si \quad x<0 \\ x+2 & si \quad 0<x<2 \\ a & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcula el valor de "a" per a que sigui contínua en x=2

b) Estudia la continuïtat de la funció, indicant de quin tipus són les discontinuïtats que es presenten.

(0,5+0,75=1,25 punts)

5.- Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} =$ b) $\mathbf{lím}_{x\to+\infty} \left[x^3 - \mathbf{log}\ x\right]$ c) $\lim_{x\to2^+} \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{x-2}} =$

d) $\lim_{x\to0} (1-3x)^{\frac{x+1}{x}} =$ e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) =$

(07,5·3+1·2= 4,25 punts)

Nom: **Grup:**

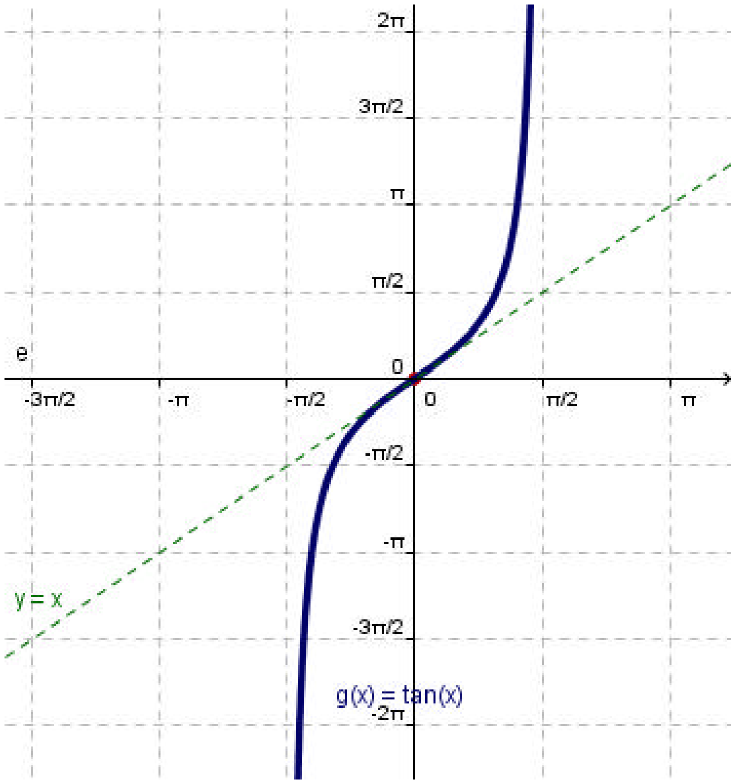
1.- **Defineix la funció y= arctan (x), dibuixa la seva gràfica, indica quin és el seu domini, el seu recorregut i si té asímptotes indica quines són.**

(1,5 punts)

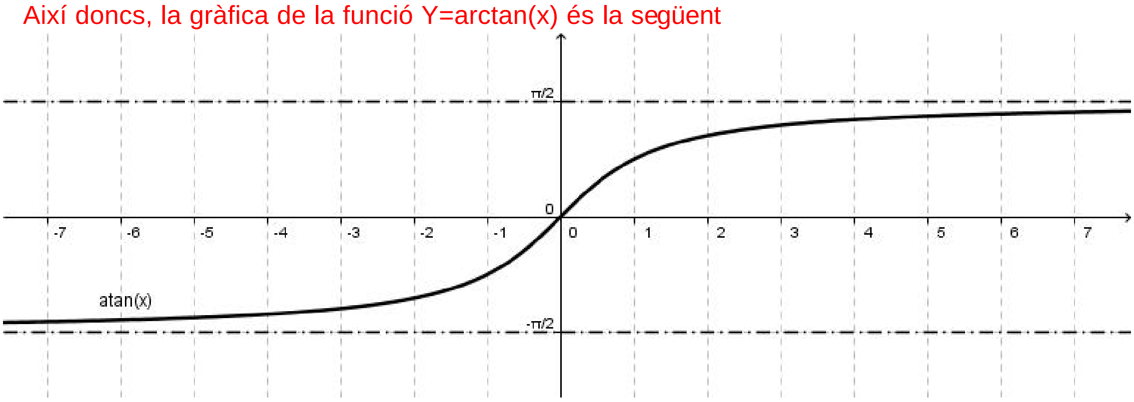
És la funció inversa de la funció y=tan(x) considerada amb domini = (–90º, 90º) =

$$\left(\frac{-p}{2}rad, \frac{p}{2}rad\right)$$

Per dibuixar la gràfica de la funció inversa de Y=tan(x) només cal recordar la gràfica de la tangent en el domini anterior



i fer la seva simetria respecte la recta Y=X
Així doncs, la gràfica de la funció Y=arctan(x) és la següent



Domini = R, Recorregut = (–90º, 90º) = $\left(\frac{-p}{2}rad, \frac{p}{2}rad\right)$ i té dues asímptotes

per $x \to -\infty$ la recta $Y = -p/2$ i per per $x \to +\infty$ la recta $Y = p/2$

2.-

c) Enuncia el teorema de Bolzano.

d) Demostra que l'equació $x^3 = 2^x$ té, almenys, una solució real entre 1 i 2 i calcula una aproximació seva fins les dècimes.

(1,5 punts)

a) Teorema de Bolzano:

Si y=f(x) contínua en [a,b] i f(a) i f(b) de signe diferent (f(a)·f(b)<0) aleshores existeix un punt c$\in$ (a,b) tal que f(c)=0

b) Sigui la funció f(x)= $x^3 - 2^x$.

Aquesta funció és contínua en [1,2]

f(1)= 1–2=–1 i f(2)=8–4=4 tenen signes diferents

Així doncs li podem aplicar el teorema de Bolzano a l'interval [1,2] i obtenim que $\exists$c $\in$ (1,2) tal que f(c)=0.

Ara per obtenir una aproximació fins el 1r decimal intento aplica el teorema un interval d'amplitud 0,1. I avaluant obtinc:

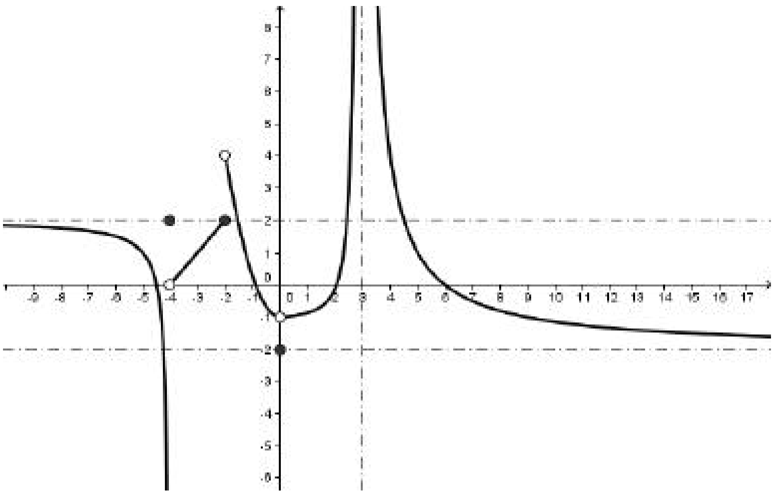
f(1,5)=0,54657>0; **f(1,3)=–0,26529<0** **f(1,4)=0,10498>0**

Així doncs li podem aplicar el teorema de Bolzano a l'interval [1,3 , 1,4] i obtenim que $\exists$c $\in$ (1,3 , 1,4) tal que f(c)=0.

Amb la qual cosa podem assegurar que c=1,3 és l'aproximació buscada.

3.- Considera la gràfica de la funció Y = f(x)

- **Calcula els límits següents:**



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = \mathbf{0}$

e) $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = \nexists$

f) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \mathbf{2}$

g) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \mathbf{4}$

h) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$

i) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \mathbf{-1}$

- **Indica en quins punts Y = f(x) no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.**

En X = – 4 discontinuïtat asimptòtica. Podem ser més concrets dient asimptòtica per l'esquerra del – 4 i de salt per la dreta del –4

En X = –2 discontinuïtat de salt. El salt és de +2

En X = 0 discontinuïtat evitable

En X = 3 discontinuïtat asimptòtica

I les asímptotes són:

X= – 4 però només per l'esquerra del –4 i tendint cap a – ∞

X= 3 pels dos costats del 3 i tendint sempre cap a + ∞

Y= 2 per $X \to -\infty$ i

Y= –2 per $X \to +\infty$

(0,1·9 +0,3·2=1,5 punts)

4.- **Donada la funció** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & si \quad x<0 \\ x+2 & si \quad 0<x<2 \\ a & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Calcula el valor de "a" per a que sigui contínua en x=2

- f(2)=a
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 4$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} a = a$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que a= 4

b) Estudia la continuïtat de la funció, indicant de quin tipus són les discontinuïtats que es presenten.

La funció és contínua sense cap dubte en

$$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)=R-\{-1,0,2\}$$

En la resta de punts cal estudiar que passa i es veu que

- En X=–1 discontinuïtat asimptòtica.

  Ja que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$
- En X=0 discontinuïtat evitable

  Ja que malgrat que existeix el $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ (els dos laterals coincideixen) el que passa és que no existeix f(0) (és a dir x=0 no és del domini).

- En X=2. Si a=4 és contínua i altrament hi ha un discontinuïtat de salt, tal com s'ha vist a l'apartat a)

(0,5+0,75=1,25 punts)

5.- **Calcula els límits següents:**

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} =$ **b)** $\boldsymbol{lím}_{x\to+\infty} \left[x^3 - \boldsymbol{log}\, x\right]$ **c)** $\lim_{x\to 2^+} \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{x-2}} =$

d) $lím_{x\to 0} \ (1-3x)^{\frac{x+1}{x}} =$ **e)** $lím_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) =$

(07,5·3+1·2= 4,25 punts)

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+2)}{(x^2+1)} = \dfrac{4}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3-\log x\right]=+\infty$

Perquè les potències són infinits d'ordre superior als logaritmes.

c) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{x-2}}=7^{\frac{1}{0^+}}=7^{+\infty}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to0}\ (1-3x)^{\frac{x+1}{x}}=1^{\infty}$ així doncs anem a fabricar el número e

$$\lim_{x\to0}\ (1-3x)^{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{-3x}{1}\right)^{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{-3x}}\right)^{\frac{1}{-3x}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{-3x}{1}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{-3x}}\right)^{\frac{1}{-3x}}\right]^{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{(-3x)}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}-3(x+1)}=e^{-3}$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1-x)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$