**Nom:** **Grup:**

**1.-** Defineix la funció y= arccos(x), dibuixa la seva gràfica, indica quin és el seu domini, el seu recorregut, on és contínua i estudia el seu creixement i decreixement.

(1,5 punts)

**2.-** Demostra que l'equació $\sin(x) = x^2 - 1$ té, almenys, una solució real entre 1 i 2 radians i calcula una aproximació seva fins les dècimes [**Atenció les unitats de x són radians**]

(1,5 punts)

**3.-** Dibuixa la gràfica d'una funció **Y= f(x)** que verifiqui:

f(x) és contínua $\forall x \in (-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$,

$\lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -4^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} f(x) = -1$ i $f(2) = 1$

Indica en els punts on **Y = f(x)** no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1 + 0,5=1,5 punts)

**4.-** Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si & x \le 2 \\ a - x^2 & si & x > 2 \end{cases}$ Estudia la continuïtat de la funció per als diferents valors del paràmetre "**a**".

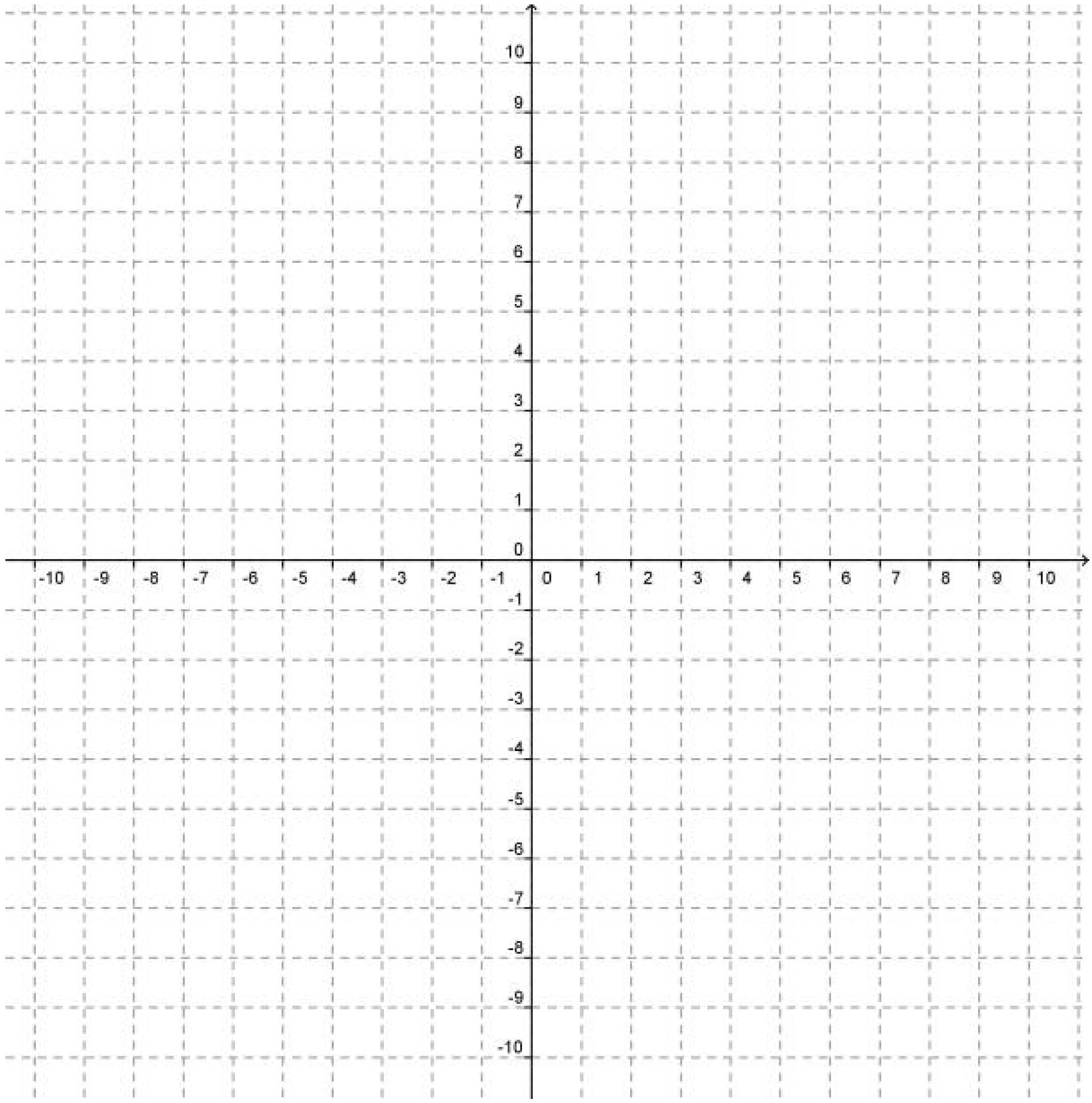
*(1 punt)*

**5.-** Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$  b) $\lim_{x \to +\infty} \left[ \dfrac{\ln(1+x)}{2^x} \right]$  c) $\lim_{x \to -\infty} \left[ \dfrac{\ln(1-x)}{2^x} \right]$

d) $\lim_{x \to 3} \left( \dfrac{x+1}{2x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}}$  e) $\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4} \right)$

*(1+07,5·2+1·2= 4,5 punts)*


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
**Institut d'Educació Secundària**
**Jaume Balmes**

Departament de Matemàtiques
MA - 2n de Batx
**Funcions i límits**

**Nom:** **Grup:**

**1.-** Defineix la funció y= arccos(x), dibuixa la seva gràfica, indica quin és el seu domini, el seu recorregut, on és contínua i estudia el seu creixement i decreixement.

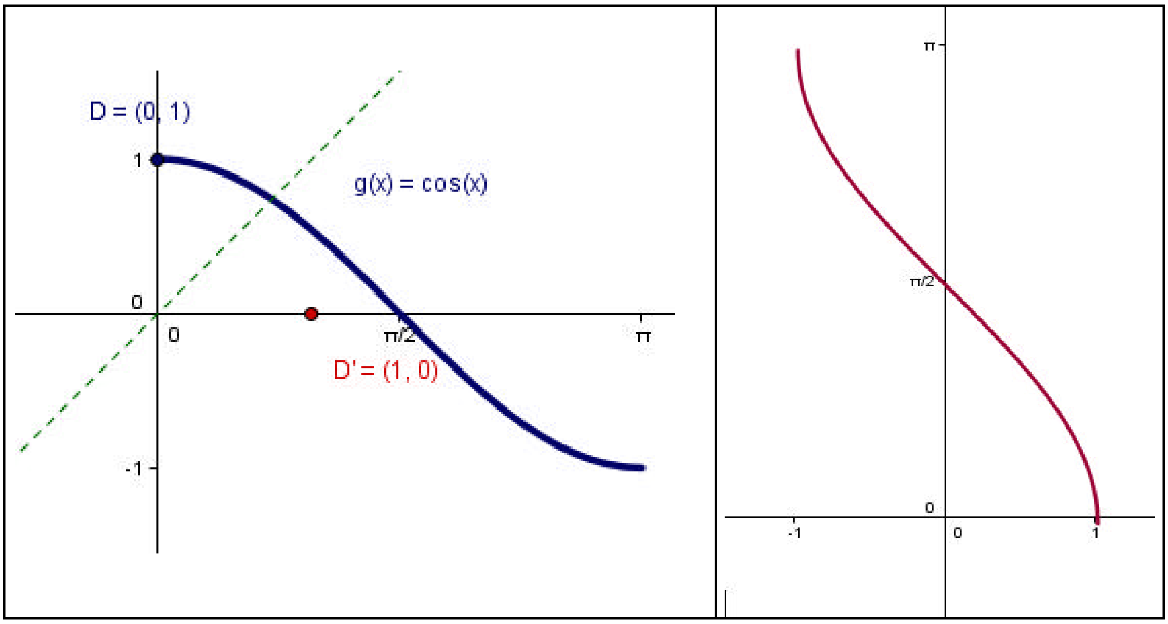
(1,5 punts)

Explicat a http://www.xtec.cat/~agarrido/GeoGebra/3/arccosinus.html

És la funció inversa de la funció y=cos (x) considerada amb domini = [0º, 180º] = $\left[0\ rad, \pi\ rad\right]$ ja que és un tros on la funció és bijectiva i per tant invertible.

Per dibuixar la gràfica de la funció inversa de Y=cos(x) només cal recordar la gràfica de la funció cosinus en el domini anterior i fer la seva simetria respecte la recta Y=X

Així doncs, aquí teniu a l'esquerra la gràfica de la funció Y= cos(x) i a la dreta la de Y=arccos (x)




Domini = [–`1,1] , Recorregut = (0º, 180º) = $\left[0\ rad, \pi\ rad\right]$ , és contínua en tot el seu domini i és tota l'estona decreixent.

**2.-** Demostra que l'equació $\sin(x) = x^2 - 1$ té, almenys, una solució real entre 1 i 2 radians i calcula una aproximació seva fins les dècimes [**Atenció les unitats de x són radians**]

(1,5 punts)

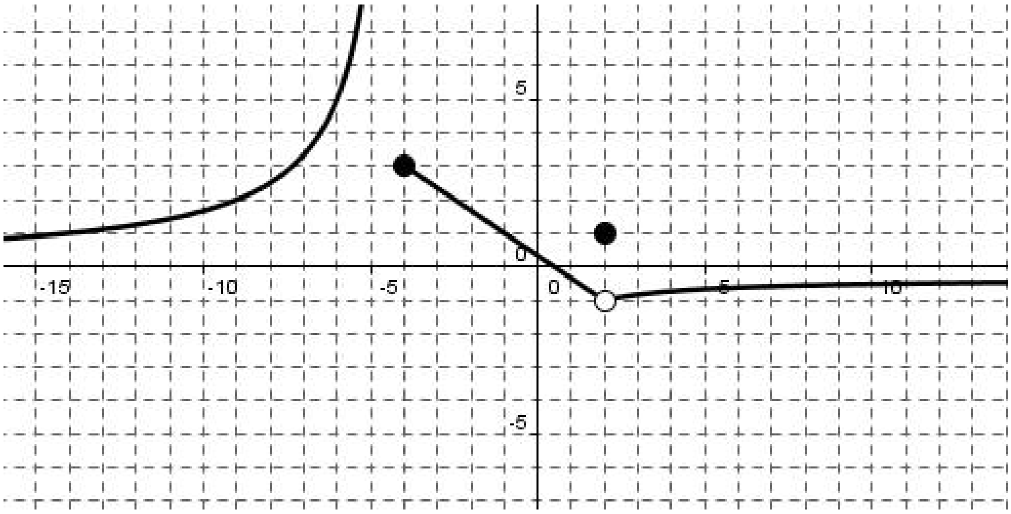
Sigui la funció f(x)= $\sin(x) - x^2 + 1.$
Aquesta funció és contínua en [1,2]
f(1)=0,84 i f(2)= –2,09 tenen signes diferents

Així doncs li podem aplicar el teorema de Bolzano a l'interval [1,2] i obtenim que $\exists$c $\in$ (1,2) tal que f(c)=0.
Ara per obtenir una aproximació fins el 1r decimal intento aplica el teorema un interval d'amplitud 0,1. I avaluant obtinc:
**f(1,5)= – 0,25 <0**; f(1,6) = –1,61; **f(1,4)=0,025>0**

Així doncs li podem aplicar el teorema de Bolzano a l'interval [1,4 , 1,5] i obtenim que $\exists$c $\in$ (1,4 , 1,5) tal que f(c)=0.
Amb la qual cosa podem assegurar que c$\simeq$ 1,4 és l'aproximació buscada.

**3.-** Dibuixa la gràfica d'una funció **Y= f(x)** que verifiqui:
f(x) és contínua $\forall x \in (-\infty,-4) \cup (-4,2) \cup (2,+\infty)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$,
$\lim_{x\to-4^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-4^+} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$ i $f(2) = 1$
Indica en els punts on **Y = f(x)** no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1 + 0,5=1,5 punts)




En aquesta gràfica he dibuixat el punt (–4,3), però l'enunciat no diu que existeixi, ni que no existeixi, per tant les dues opcions són vàlides.

**No és contínua en x = – 4** on hi ha una discontinuïtat asimptòtica per l'esquerra.
**No és contínua en x = 2**, on hi ha una discontinuïtat evitable.
**És contínua en tots els altres punts, és a dir a**

$$R - \{-4,2\} = (-\infty,-4) \cup (-4,2) \cup (2+\infty)$$

**Té les asímptotes següents:**
**y = 0 és asímptota** tant quan $x \longrightarrow +\infty$ com quan $x \longrightarrow -\infty$

**x = – 4 és asímptota** vertical per l'esquerra és a dir quan $x \longrightarrow -4^-$

**4.-** Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si \quad x \le 2 \\ a - x^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$ Estudia la continuïtat de la funció per als diferents valors del paràmetre "**a**".

*(1 punt)*

Només hi ha dubte en el punt x=2 ja que en els altres intervals oberts és polinòmica i per tant contínua. Així doncs podem dir que la funció és contínua sense cap dubte en

$$(-\infty,2) \cup (2,+\infty) = R - \{2\}$$

**Ara calculem el valor de "a" per a que també sigui contínua en x = 2**

- f(2)= 4 +2 a
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 + ax = 4 + 2a$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} a - x^2 = a - 4$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que a–4 = 4 +2a $\Longrightarrow$ **a= – 8**

**Solució:**

**si a = – 8 la funció és contínua a tot R**

**si a ≠ – 8 la funció és contínua en** $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)=R-\{2\}$ i en el punt x=2 té una discontinuïtat de salt real.

**5.-** Calcula els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{2^x}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\ln(1-x)}{2^x}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4}\right)$

*(1+07,5·2+1·2= 4,5 punts)*

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+5)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)}{(x+5)}=\dfrac{-1}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{2^x}\right]=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ és una indeterminació que podem solucionar, ja que les potències de base >1 són infinits d'ordre superior als logaritmes. Així doncs:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+x)}{2^x}\right]=0^+$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\ln(1-x)}{2^x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{2^{-x}}\right]=\dfrac{+\infty}{0^+}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}=1^\infty$ així doncs anem a fabricar el número e

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{2x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{x+1}{2x-2}-1\right)^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{-x+3}{2x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{-x+3}}\right)^{\frac{2x-2}{-x+3}\cdot\frac{1}{x-3}\cdot\frac{-x+3}{2x-2}}=\lim_{x\to 3}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{-x+3}}\right)^{\frac{2x-2}{-x+3}}\right]^{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{-x+3}{2x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{-1}{2x-2}\right)}=e^{-1/4}$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4}\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-(x^2-4)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+4}{\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$