



Nom: _____

Grup: _____

1.- Trobeu totes les solucions de les equacions següents:

a) $4 \tan(5x) = 16$

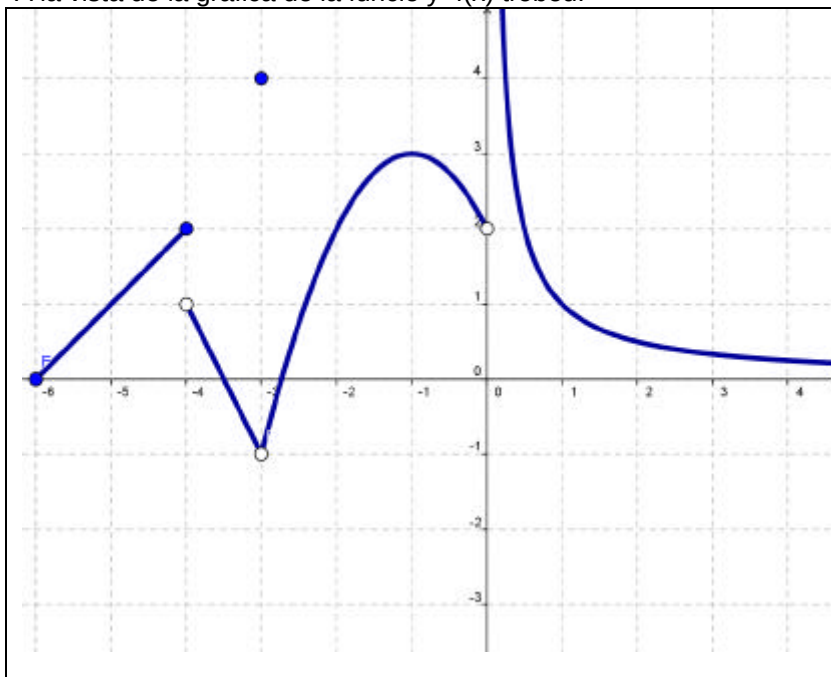
b) $20 \cdot 3^{5x+2} = 100$

(1 punt)

2.- Defineix la funció $y = \arctan(x)$, dibuixa la seva gràfica, indica quin és el seu domini, el seu recorregut i si té asímptotes indica quines són.

(1,25 punts)

3.- A la vista de la gràfica de la funció $y=f(x)$ trobeu:



a) Domini (f) =

b) Recorregut (f) =

c) les imatges del -6 , -4 , -3 , 0 i 1

d) Les antiimatges del -1 , $+1$, 4 i 5

e) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

f) On la funció és contínua.

g) Indica en els punts on $Y = f(x)$ no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

($0,25 \cdot 3 + 0,4 + 0,6 + 0,25 + 0,5 = 2,5$ punts)

4.- Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^3 + x^2}{-2x^3 + x} + \frac{2x^4 + x^3}{4x^4 - 10} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x}{\log(x^2)} \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{4x+1} \right)^{\frac{8}{x-1}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2} - \sqrt{x^4 + 8x^2} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 14x^2}{3^{-7x} - \ln(x^2)}$

($1 + 0,75 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0,75 = 5,25$ punts)



Nom:

Grup:

1.- Trobeu totes les solucions de les equacions següents:

a) $4 \tan(5x) = 16$

$$\tan(5x) = 4 \Rightarrow 5x = \arctan(4) + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\arctan(4) + k \cdot 180^\circ}{5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\arctan(4) + k \cdot 180^\circ}{5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 15,19^\circ + k \cdot 36^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{o } x = 0,27 \text{ rad} + \frac{k \cdot \pi}{5} \text{ rad} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

b) $20 \cdot 3^{5x+2} = 100$

$$20 \cdot 3^{5x+2} = 100 \Rightarrow 3^{5x+2} = 5 \Rightarrow \ln(3^{5x+2}) = \ln(5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5x+2)\ln(3) = \ln(5) \Rightarrow 5x+2 = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \Rightarrow 5x = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} - 2 \Rightarrow$$

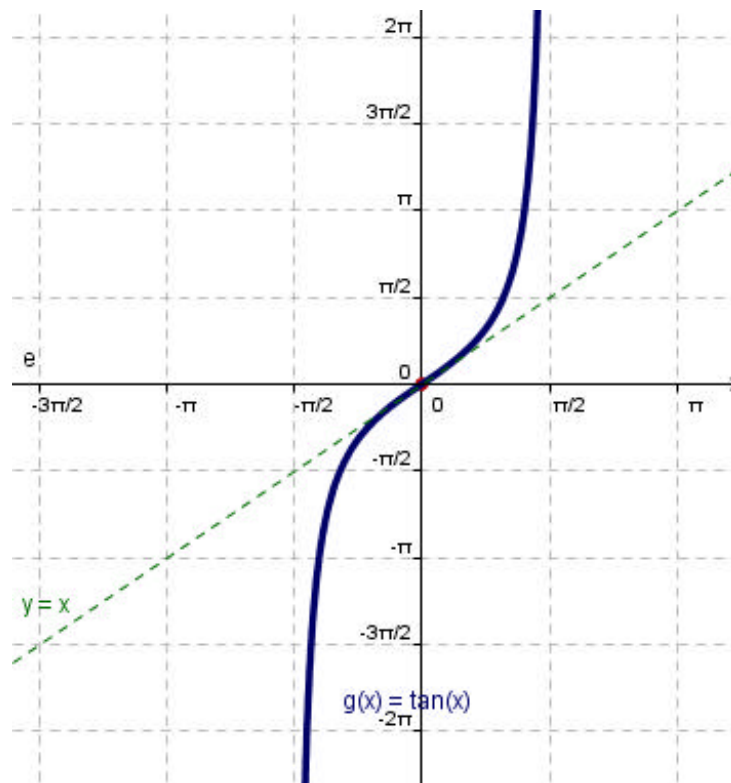
$$\Rightarrow x = \frac{\ln(5)}{5 \cdot \ln(3)} - \frac{2}{5} \approx -0,1070$$

2.- Defineix la funció $y = \arctan(x)$, dibuixa la seva gràfica, indica quin és el seu domini, el seu recorregut i si té asímptotes indica quines són. (1 punt)

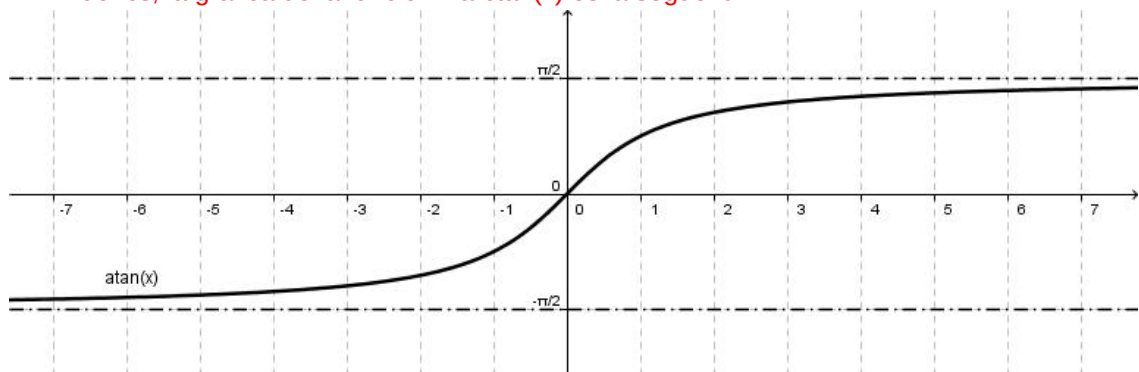
És la funció inversa de la funció $y = \tan(x)$ considerada amb domini $= (-90^\circ, 90^\circ) =$ (1,25 punts)

$$\left(-\frac{\pi}{2} \text{ rad}, \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right)$$

Per dibuixar la gràfica de la funció inversa de $Y = \tan(x)$ només cal recordar la gràfica de la tangent en el domini anterior

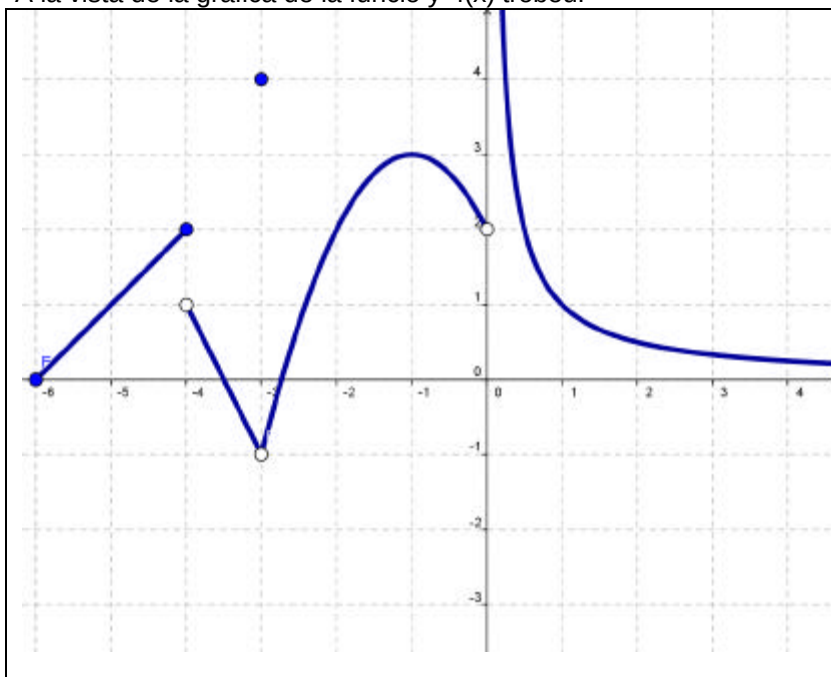


i fer la seva simetria respecte la recta $Y=X$
Així doncs, la gràfica de la funció $Y=\arctan(x)$ és la següent



Domini = $\mathbb{R}$, Recorregut = $(-90^\circ, 90^\circ) = \left(-\frac{p}{2} \text{ rad}, \frac{p}{2} \text{ rad}\right)$ i té dues asímptotes
per $x \rightarrow -\infty$ la recta $Y = -p / 2$ i per per $x \rightarrow +\infty$ la recta $Y = p / 2$

3.- A la vista de la gràfica de la funció $y=f(x)$ trobeu:



h) Domini (f) = $[-6, 0) \cup (0, +\infty)$

i) Recorregut (f) = $(-1, +\infty)$

j) les imatges del -6, -4, -3, 0 i 1
 $f(-6)=0$; $f(-4)=2$; $f(-3)=4$;
 $\nexists f(0)$; $f(1)=1$

k) Les antiimatges del -1, +1, 4 i 5
 Anti (-1) no hi ha
 Anti (1) = $\{-5, -2, 5, 1\}$
 Anti (4) = $\{-3, 0, 2\}$
 Anti (5) = 0,1

l) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

m) On la funció és contínua.

f(x) és contínua $\forall x \in (-6, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, +\infty)$,

n) Indica en els punts on $Y = f(x)$ no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

En $X = -4$ té una discontinuïtat de salt

En $X = -3$ té una discontinuïtat evitable

En $X = 0$ té una discontinuïtat asimptòtica per la dreta.

La recta $X=0$ és asímptota per la dreta i la recta $Y=0$ és asímptota quan $X \rightarrow +\infty$

(0,25 · 3 + 0,4 + 0,6 + 0,25 + 0,5 = 2,5 punts)

4.- Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x^2 + 3x + 2)}{(x-3) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 3x + 2)}{(x+1)} = \frac{20}{4} = 5$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^3 + x^2}{-2x^3 + x} + \frac{2x^4 + x^3}{4x^4 - 10} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^3 + x^2}{-2x^3 + x} + \frac{2x^4 + x^3}{4x^4 - 10} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^3}{-2x^3} + \frac{2x^4}{4x^4} \right] = -\frac{3}{2} + \frac{2}{4} = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x}{\log(x^2)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x}{\log(x^2)} \right] = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ però com l'ordre de l'infinít del numerador és major que el de }$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x}{\log(x^2)} \right] = +\infty$$

l'infinít del denominador podem dir que

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{4x+1} \right)^{\frac{8}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{4x+1} \right)^{\frac{8}{x-1}} = 1^\infty \Rightarrow \text{així doncs anem a fabricar el número e}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{4x+1} \right)^{\frac{8}{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{5x}{4x+1} - 1 \right)^{\frac{8}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{5x-4x-1}{4x+1} \right)^{\frac{8}{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x+1}{x-1}} \right)^{\frac{4x+1}{x-1} \cdot \frac{8}{x-1} \cdot \frac{x-1}{4x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{4x+1}{x-1}} \right)^{\frac{4x+1}{x-1}} \right]^{\frac{8}{x-1} \cdot \frac{x-1}{4x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{8}{4x+1} \right)} = e^{8/5} \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2} - \sqrt{x^4 + 8x^2} \right) \infty - \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2} - \sqrt{x^4 + 8x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2} - \sqrt{x^4 + 8x^2} \right) \frac{\left(\sqrt{x^4 - 2x^2} + \sqrt{x^4 + 8x^2} \right)}{\left(\sqrt{x^4 - 2x^2} + \sqrt{x^4 + 8x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 - 2x^2} \right)^2 - \left(\sqrt{x^4 + 8x^2} \right)^2}{\left(\sqrt{x^4 - 2x^2} + \sqrt{x^4 + 8x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x^2}{\left(\sqrt{x^4} + \sqrt{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5 = -5 \end{aligned}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 14x^2}{3^{-7x} - \ln(x^2)}$$

Aquí primer fem el canvi de variable de x per -x per tal que els límit sigui de $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 14x^2}{3^{-7x} - \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 14x^2}{3^{7x} - \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 14x^2}{3^{7x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3}{3^{7x}} = 0^-$$

I posteriorment:

- ❑ al denominador utilitzem que $\text{Ordre}(\text{exponencial}) > \text{Ordre}(\text{logaritme})$
- ❑ al numerador ens quedem amb el monomi de major grau
- i finalment
- ❑ que $\text{Ordre}(\text{potència}) < \text{Ordre}(\text{exponencial})$

(1+0,75·2+1·2+0,75= 5,25 punts)