



Nom: _____

Grup: _____

- 1.- Trobeu totes les solucions de l'equació: $32 \sin(2x+60^\circ) = 16$

(0,5 punts)

- 2.- Demostreu que l'equació $x^7 - 14x^2 + 10x = 1$ té almenys una solució real i aproximeu una d'elles amb un precisió d'un decimal.

(0,5 punts)

- 3.- Trobeu la funció inversa o recíproca de la funció $f(x) = \frac{x+2}{x}$. Digueu quin és el domini i recorregut de la funció $y=f(x)$

(1 punt)

- 4.- Dibuixeu la gràfica d'una funció $Y=f(x)$ que verifiqui:

Domini de $f(x) = (-\infty, -1) \cup (-1, 4]$ i contínua en la major part de punts del seu domini amb

la condició que es verifiquin les condicions següents $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, $f(2) = 0$ i $f(4) = 5$ i entenent que en l'extrem $x=4$ és contínua per l'esquerra.

Indica en els punts on $Y=f(x)$ no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1,5+ 0,5=2 punts)

- 5.- Calculeu "a" i "b" per a què la funció $f(x)$ sigui contínua a tot $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} = x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ = b & \text{si } -1 < x < 3 \\ = 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(1,5 punts)

- 6.- Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{5x^2 - 5x - 10}$

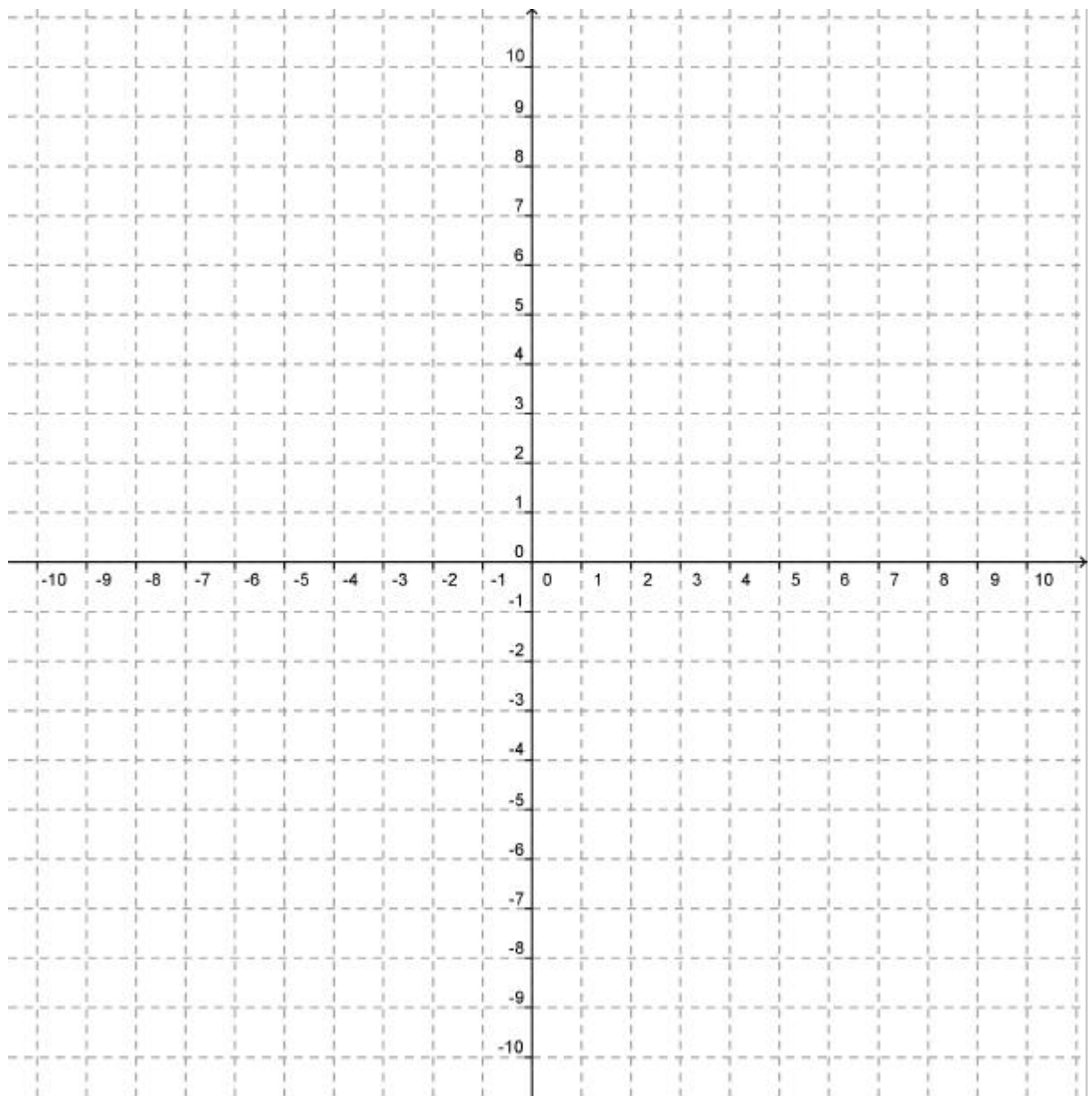
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 27x^2}}{-2x + 1000} + \frac{20x^2 - 3x}{\sqrt{4x^4 - 10}} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2^x}$

(1+0,75+1·2+0,75= 4,5 punts)



Nom:

Grup:

- 1.-** Trobeu totes les solucions de l'equació: $32 \sin (2x+60^\circ) = 16$

(0,5 punts)

$$\sin(2x + 60^\circ) = 1/2 \Rightarrow 2x + 60^\circ = \arcsin(1/2) + k \cdot 360^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$2x = 30^\circ - 60^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-30^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -15^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- 2.- Demostreu que l'equació $x^7 - 14x^2 + 10x = 1$ té almenys una solució real i aproximeu una d'elles amb un precisió d'un decimal.

(0,5 punts)

Passem tots els termes a un membre de forma que a l'altre quedi zero.

$$x^7 - 14x^2 + 10x - 1 = 0 \text{ així doncs si considerem la funció } f(x) = x^7 - 14x^2 + 10x - 1$$

el problema es reduxi a troba zeros d'aquesta funció.

I com la funció és contínua a tot $\mathbb{R}$ i per tant en qualsevol interval podem aplicar el teorema de bolzano

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - 14 + 10 - 1 < 0$$

$$f(2) = 128 - 56 + 20 - 1 > 0$$

com $f(x)$ és contínua en $[1,2]$ podem aplicar el Teorema de Bolzano en aquest interval i tenim doncs:

$\exists c \in (1, 2)$ t.q. $f(c) = 0$ així doncs ja sabem que existeix com a mínim un zero i és $C \approx 1,$

Ara per precisar el primer decimal busquem un nou interval més petit on aplicar el Teorema de Bolzano

$f(1,5) < 0$; $f(1,6) > 0$ i $f(x)$ és contínua en $[1,6, 1,7]$ per tant aplicant el Teorema de Bolzano en aquest interval i tenim doncs:

$\exists c \in (1.6, 1.7)$ t.q. $f(c) = 0$ **així doncs podem dir que $c \simeq 1,6$**

- 3.- Trobeu la funció inversa o recíproca de la funció $f(x) = \frac{x+2}{x}$. Digueu quin és el domini i recorregut de la funció $y=f(x)$

(1 punt)

Considerem la funció $y = \frac{x+2}{x}$; aïllem la x

$$y \cdot x = x + 2 \Rightarrow y \cdot x - x = 2 \Rightarrow x(y - 1) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{y - 1} \text{ i finalment permutem la X i la } y$$

Y obtenint doncs que la funció buscada és $y = \frac{2}{x-1}$ és a dir $f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1}$

Es pot comprovar (encara que l'enunciat no ho demana) que

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\frac{2}{x-1} + 2}{\frac{2}{x-1}} = \frac{\frac{2+2x-2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} =$$

$$= \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2+x}{x}\right) = \frac{2}{\frac{2+x}{x} - 1} = \frac{2}{\frac{2+x-x}{x}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

I contestant al que es pregunta tenim que:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{Rec}(f) = \text{Domini}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$$

4.- Dibuixeu la gràfica d'una funció $Y = f(x)$ que verifiqui:

Domini de $f(x) = (-\infty, -1) \cup (-1, 4]$ i contínua en la major part de punts del seu domini amb

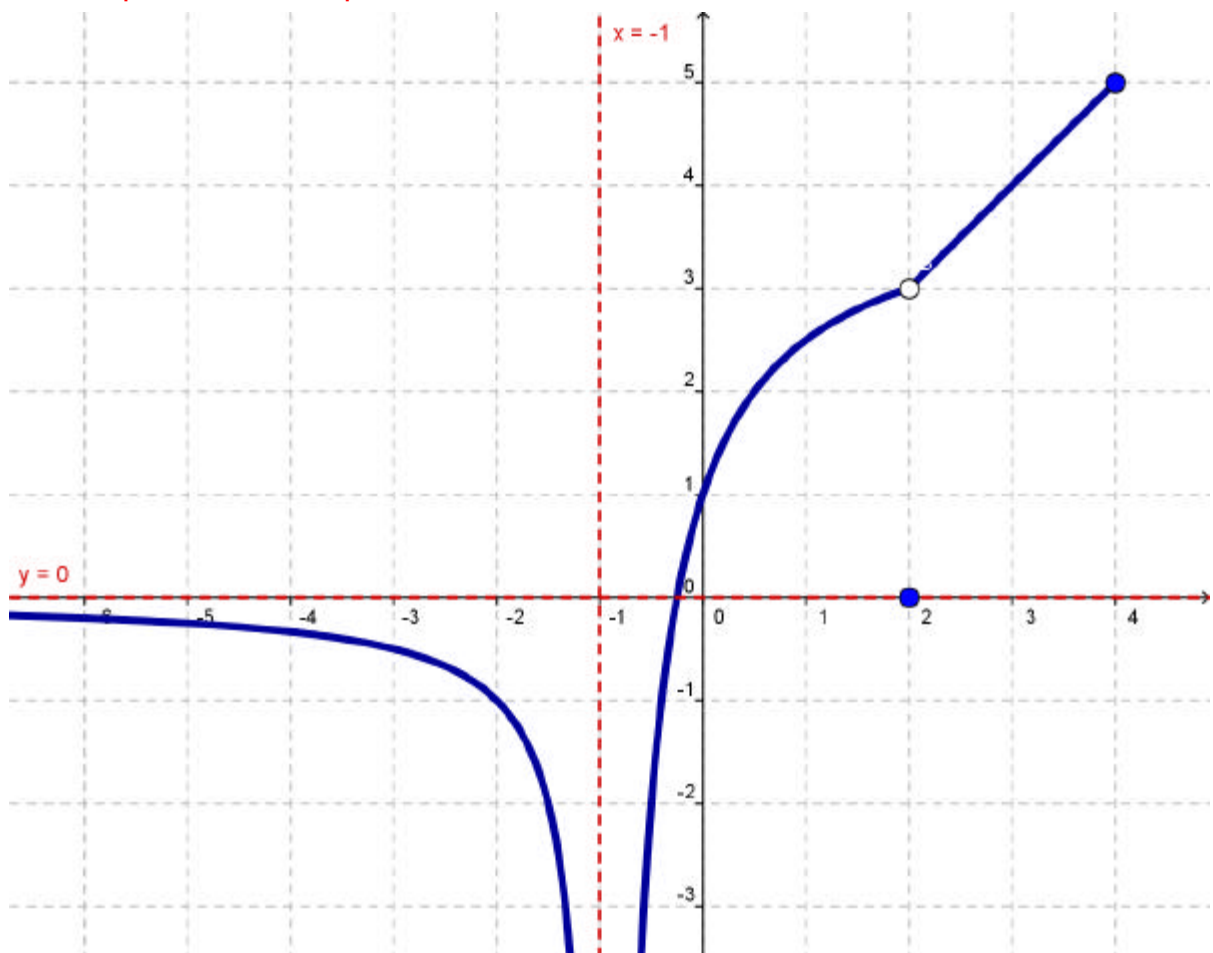
la condició que es verifiquin les condicions següents $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, $f(2) = 0$ i $f(4) = 5$ i entenent que en l'extrem $x=4$ és contínua per l'esquerra.

Indica en els punts on $Y = f(x)$ no és contínua, el tipus de discontinuïtat de cada cas i les asímptotes que presenta.

(1,5+ 0,5=2 punts)

Una possible solució és aquesta funció:



$f(x)$ NO és contínua en $x = -1$ on hi ha una discontinuïtat asimptòtica i en $x = 2$ on hi ha discontinuïtat evitable.

Hi ha dues asímptotes: $Y=0$ és asímptota horitzontal per $X \rightarrow -\infty$ i la recta $X = -1$ és una asímptota vertical tant per la dreta com per l'esquerra del -1 a la qual s'acosta pels dos costats cap a $-\infty$

5.- Calculeu "a" i "b" per a què la funció f(x) sigui contínua a tot R

$$f(x) = \begin{cases} = x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ = b & \text{si } -1 < x < 3 \\ = 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(1,5 punts)

Només hi ha dubte sobre la continuïtat en els punts $x = -1$ i $x = 3$ ja que en els altres intervals oberts és polinòmica i per tant contínua. Així doncs podem dir que la funció és contínua sense cap dubte en $(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Ara calculem el valor de "a" i "b" per a que també sigui contínua en $x = -1$ i $x = 3$
En $x = -1$

- $f(-1) = 1 - a$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + ax = 1 - a$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} b = b$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que $1 - a = b$

En $x = 3$

- $f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} b = b$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 4 = 10$

Així doncs com aquests tres valors han de coincidir, cal que $b = 10$

Per tant si $b = 10$ i $1 - a = b \Rightarrow 1 - a = 10 \Rightarrow a = -9$

Solució: f(x) és contínua en tot R $\Leftrightarrow a = -9$ i $b = 10$

6.- Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{5x^2 - 5x - 10}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 27x^2}}{-2x + 1000} + \frac{20x^2 - 3x}{\sqrt{4x^4 - 10}} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2^x}$

(1+0,75+1·2+0,75= 4,5 punts)

Solució

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{5x^2 - 5x - 10}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{5x^2 - 5x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 1)}{5(x-2) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 1)}{5(x+1)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 27x^2}}{-2x + 1000} + \frac{20x^2 - 3x}{\sqrt{4x^4 - 10}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 27x^2}}{-2x + 1000} + \frac{20x^2 - 3x}{\sqrt{4x^4 - 10}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{-2x} + \frac{20x^2}{2x^2} \right] = -1 + 10 = 9$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \Rightarrow \text{així doncs anem a fabricar el número e}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2 + 1}{2x + 1} - 1 \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2 + 1 - 2x - 1}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 2x}{\frac{2x+1}{x^2-2x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2-2x}{2x+1}}} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x}} \right)^{\frac{2x+1}{x^2-2x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x \cdot (x-2)}{2x+1}} \right] = \end{aligned}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)}{2x+1}} = e^{-2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right)^{\infty - \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(1+1)} = \frac{1}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2^x}$$

Aquí primer fem el canvi de variable de x per $-x$ per tal que els límit sigui de $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{2^{-\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$