Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Enuncia tres propietats dels determinants d'ordre n i demostra una d'elles.

(1 punt)

2) Trobeu, en funció de a, el valor del determinant $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$

(2 punts)

3) Discuteix, **utilitzant determinants**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre K

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2k & -2 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 punts)

4) Discuteix, **utilitzant transformacions de Gauss**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre "a"

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & -1 & 0 \\ a & 6 & 3-a & 9-a \end{pmatrix}$$

(2 punts)

5) Trobeu X de manera que $2XA + B = C$

si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 19 & 20 \end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 23 & 32 \end{pmatrix}$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant el mètode de Gauss-Jordan.

(3 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Enuncia tres propietats dels determinants d'ordre n i demostra una d'elles.

(1 punt)

Moltes possibilitats. Consulteu la teoria.

2) Trobeu, en funció de a, el valor del determinant $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$

(2 punts)

Fem les següents transformacions que conserven el valor del determinant:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{c1-c4 \\ c2-c4 \\ c3-c4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 2-a & 0 & 0 & a \\ 3-a & 2-a & 0 & a \\ 4-a & 3-a & 2-a & a \end{vmatrix} =$$

$$\underset{Desenvolupem\ per\ F1}{=} -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} = -a\,(2-a)^3$$

3) Discuteix, **utilitzant determinants**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre K

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2k & -2 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 punts)

Si considerem el menor format per F1, F3 i C2 i C3 tenim que

$$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang(A) \geq 2$$

Ara orlant aquest $M_2 \neq 0$ només tenim una possibilitat que és orlar-lo amb la F2 i la C1 obtenint:

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

$$M_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2k & -2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{F1+F2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2k-1 & 0 \\ -1 & 2k & -2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{DesenF1}{=}$$

$$= -(2k-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ k & 0 \end{vmatrix} = (2k-1)2k$$

I estudiant quan aquest determinant és zero podem contestar la pregunta:

- **Cas I:** $\forall k \neq 0 \ i \ k \neq \frac{1}{2}$ **Rang A = 3**
- **Cas II: K=0 aleshores com $M_2 \neq 0$ sabem que Rang (A)=2**
- **Cas III: K = ½ aleshores com $M_2 \neq 0$ sabem que Rang (A)=2**

4) Discuteix, **utilitzant transformacions de Gauss**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre "a"

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & -1 & 0 \\ a & 6 & 3-a & 9-a \end{pmatrix}$$

(2 punts)

Com el nombre de files és 3 ja podem dir que Ran(B) ≤ 3

Si escalonem treballant amb les files per la part dreta la cosa és molt fàcil:
F1 – F2
i obtenim una matriu que té el mateix rang i que ja tenim escalonada per files:

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -1 & 0 \\ a & 6 & 3-a & 9-a \end{pmatrix}$$

I per tant tenim els següents casos:

- **CAS I:** $\forall a \neq 9$ **Rang B = 3**
- **CAS II SI a=9 la matriu no està escalonada:**

Però si l'escalonem per files

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{6F2-F3}{\approx} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{45F+8F2}{\approx}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

veiem que **Rang(B)=2**

També podem calcular el Rang B treballant amb les columnes.
Ja que com C3 = – C2 i la C4 = zero podem dir que
Rang (C1, C2, C3, C4) = Rang (C1, C2, C4) = Rang (C1, C2) i com aquesta matriu sí que està escalonada per columnes puc dir que **Rang (B)=2**

5) Trobeu X de manera que 2 X A + B = C
si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 19 & 20 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 23 & 32 \end{pmatrix}$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant el mètode de Gauss-Jordan.

(3 punts)

L'objectiu és aïllar la X.

2 X A + B = C ⇒ 2 X A = C – B $\Rightarrow XA = \frac{1}{2}(C-B)$

I si existeix inversa de A (sabem que existeix ja que el seu determinant és diferent de xero) podem multiplicar per ella per la dreta obtenint així:

$$(XA)A^{-1} = \frac{1}{2}(C-B)A^{-1} \Rightarrow X(AA^{-1}) = \frac{1}{2}(C-B)A^{-1} \Rightarrow XI = \frac{1}{2}(C-B)A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}(C-B)A^{-1}$$

Així dons anem a calcular A^{-1}**. La calcularem pel mètode de Gauss-Jordan:**

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

$$\left(A \mid I\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F2+2F1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{F1-F2}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{F2/2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \approx \left(I \mid A^{-1}\right)$$

Així doncs $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 19 & 20 \end{pmatrix}$ i C = $\begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 23 & 32 \end{pmatrix}$ i per tant

$$X = \frac{1}{2}(C-B)A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12 & -10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$