Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:
   a) Si A és la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i Ampl és la matriu ampliada del mateix sistema.
   Rang(A) $\leq$ Rang (Ampl) $\leq$ Rang (A) + 1
   b) Una matriu que té tota una fila o columna de zeros és de rang zero.
   c) Si Rang (A)=3 $\Rightarrow$ tots les menors d'ordre 2 són diferents de zero.

(0,75 punts)

2) A una matriu quadrada A de dimensió n (és a dir de n x n). k$\in$ R. Calculeu quan val el determinant de la matriu (kA) en funció del determinant de A.
   És a dir calculeu **determinant (kA)=|kA|** (raoneu la resposta)

(0,25 punts)

3) Resoleu l'equació : $\begin{vmatrix} 1 & 3x & 1 & x \\ x & 1 & 3x & 1 \\ 1 & x & 1 & 3x \\ 3x & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$

(2 punts)

4) Discuteix, **utilitzant determinants**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre "k"

$$A=\begin{pmatrix} k & k & k+3 & k+1 \\ 1 & k-1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k+3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 punts)

5) Discuteix, **utilitzant transformacions de Gauss**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre "a"

$$B=\begin{pmatrix} a & 2 & 1-a \\ a & a+3 & -2 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

(2 punts)

6) Trobeu X de manera que A X = 5 (B – 2C)
   si A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 22 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ i C = $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant el mètode de Gauss-Jordan.

(3 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:
   a) Si A és la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i Ampl és la matriu ampliada del mateix sistema.
   Rang(A) $\leq$ Rang (Ampl) $\leq$ Rang (A) + 1
   b) Una matriu que té tota una fila o columna de zeros és de rang zero.
   c) Si Rang (A)=3 $\Rightarrow$ tots les menors d'ordre 2 són diferents de zero.

(0,75 punts)

a) Cert ja que la matriu Ampliada té una les mateixes columnes que A i una columna més (la de termes independents)
Rang(A) =Rang (C1, C2, ... , Cn)
Rang (Ampliada)= Rang (C1, C2, ... , Cn, B)
I com és rang és el número de columnes que són L.I. és evident que el rang de l'ampliada o coincideix amb el rang de l'anterior (Si B és C.L. de les altres columnes) o és una unitat més (Si B no és C.L. de les altres columnes)

b) Fals. Com a contraexemple no només cal mostrar un cas on sigui fals, per exemple, aquest:
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que té Rang(A)=1

c) Fals ja que només podem assegurar que hi haurà algun M_2 no nul. Per exemple
$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Rang(A)=3 i per exemple el M_2 determinar per F1F2C2C3 és zero

2) A una matriu quadrada A de dimensió n (és a dir de n x n). k$\in$ R. Calculeu quan val el determinant de la matriu (kA) en funció del determinant de A.
És a dir calculeu **determinant (kA)=|kA|** (raoneu la resposta)

|A|=det(C1,C2, ... ,Cn)

|KA|=det (k·C1,k·C2, ... ,k·Cn) i si traiem factor comu a "k de cada columna tenim que |KA|=det (k·C1,k·C2, ... ,k·Cn)= k^n det(C1,C2, ... ,Cn)= k^n|A|

(0,25 punts)

3) Resoleu l'equació : $\begin{vmatrix} 1 & 3x & 1 & x \\ x & 1 & 3x & 1 \\ 1 & x & 1 & 3x \\ 3x & 1 & x & 1 \end{vmatrix}=0$

Fem les següents transformacions que conserven el valor del determinant primer calcularem el determinant i després ja farem l'equació

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x & 1 & x \\ x & 1 & 3x & 1 \\ 1 & x & 1 & 3x \\ 3x & 1 & x & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F2-xF1 \\ F3-F1 \\ = \\ F4-3xF1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3x & 1 & x \\ 0 & 1-3x^2 & 2x & 1-x^2 \\ 0 & -2x & 0 & 2x \\ 0 & 1-9x^2 & -2x & 1-3x^2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{Desenvolupem\ per\ C1}{=} \begin{vmatrix} 1-3x^2 & 2x & 1-x^2 \\ -2x & 0 & 2x \\ 1-9x^2 & -2x & 1-3x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} factor\ de\ F2 \\ = \\ F3+F1 \end{matrix}$$

$$= (2x)\begin{vmatrix} 1-3x^2 & 2x & 1-x^2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-12x^2 & 0 & 2-4x^2 \end{vmatrix} \overset{Desenv\ C2}{=} = -(2x)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2-12x^2 & 2-4x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2x)^2\left[-2+4x^2-2+12x^2\right] = -(2x)^2\left[16x^2-4\right] =$$

$$= -16x^2\left[4x^2-1\right] = -16x^2(2x-1)(2x+1)$$

Així doncs ara ja podem solucionar l'equació que és:

$$-16x^2(2x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -16x^2 = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ (2x-1) = 0 & \Rightarrow & x = \dfrac{1}{2} \\ (2x+1) = 0 & \Rightarrow & x = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

4) Discuteix, **utilitzant determinants**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre "k"

$$A=\begin{pmatrix} k & k & k+3 & k+1 \\ 1 & k-1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k+3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 punts)

Si considerem el menor format per F2, F3 i C1 i C2 tenim que

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang(A) \geq 2$$

Ara orlant aquest $M_2 \neq 0$ només tenim dues possibilitats que és orlar-lo amb la F1C3 i la F1C4.

Orlant-lo amb F1 i C3

$$M_3 = \begin{vmatrix} k & k & k+3 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 \end{vmatrix} \overset{Factor\ de C3}{=} (k+3)\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k+3)\left[k(k-1)+1-k\right] = (k+3)\left[k^2-2k+1\right] = (k+3)(k-1)^2$$

I estudiant quan aquest determinant podem començar a separar els casos

- **Cas I:** $\forall k \neq 1 \ i \ k \neq -3$ **Rang A = 3**
- **Cas II: K=1** aleshores com $M_2 \neq 0$ i un orlat seu el nul, encara hem de mirar l'altre orlat possible que és el de F1 i C4

$$M_3 = \begin{vmatrix} k & k & k+1 \\ 1 & k-1 & k \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{Com\, k=1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1-1=0$$

  Així com tots els orlats de $M_2 \neq 0$ són nuls **podem dir que Rang(A)=2**
- **Cas III: K = –3** aleshores com $M_2 \neq 0$ i un orlat seu el nul, encara hem de mirar l'altre orlat possible que és el de F1 i C4

$$M_3 = \begin{vmatrix} k & k & k+1 \\ 1 & k-1 & k \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{Com\, k=-3}{=} \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -36-2-9-9 \neq 0$$

  Així com podem dir que Rang(A)=3

Aquests casos es poden resumir així:

- **Cas I:** $\forall k \neq 1$ **el Rang A = 3**
- **Cas II: K=1 el Rang A = 2**

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

5) Discuteix, **utilitzant transformacions de Gauss**, quin és el rang d'aquesta matriu segons el valor del paràmetre "a"

$$B = \begin{pmatrix} a & 2 & 1-a \\ a & a+3 & -2 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

(2 punts)

Com el nombre de files és 3 ja podem dir que Ran(B) $\leq$ 3

Si escalonem treballant amb les files per la part esquerra la cosa és molt fàcil:
F2 – F1

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1-a \\ 0 & a+1 & a-3 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \underset{F3-F2}{\approx} \begin{pmatrix} a & 2 & 1-a \\ 0 & a+1 & a-3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

I per tant ja la tenim escalonada i els casos són els següents:

- **CAS I:** $\forall a \neq 0 \ i \ a \neq -1$ **Rang B = 3**
- **CAS II SI a=0 la matriu no està escalonada per files, però sí per columnes i puc dir que el Rang B=2**

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **CAS III SI a=–1 la matriu no està escalonada per files, però s'escalona fàcilment i resulta que el Rang(B)=2**

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{F3+F2}{\approx} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

6) Trobeu X de manera que A X = 5 (B – 2C)

si A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 22 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ i C = $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant el mètode de Gauss-Jordan.

(3 punts)

L'objectiu és aïllar la X.

A X = 5 (B – 2C)

I si existeix inversa de A (sabem que existeix ja que el seu determinant és diferent de xero) podem multiplicar per ella per la dreta obtenint així:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}5(B-2C) \Rightarrow (A^{-1}A)X = 5A^{-1}(B-2C) \Rightarrow IX = 5A^{-1}(B-2C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 5A^{-1}(B-2C)$$

Així dons anem a calcular A^{-1}. La calcularem pel mètode de Gauss-Jordan:

$$(A \mid I \mid) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F2+2F1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{5F1-F2}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F2/5}{\overset{F1/5}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right) \approx (I \mid A^{-1} \mid)$$

Així doncs $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 22 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **i C =** $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **i per tant**

$$X = 5A^{-1}(B-2C) = 5\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 22 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 12 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 4 \\ 30 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$