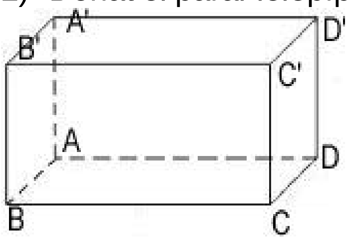
Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) **Utilitzant determinants** discuteix la compatibilitat d'aquest sistema segons els valors del paràmetre **"k"** i soluciona'l en els casos que sigui possible (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & (k-2)y & + & kz & = & k^2+8k+1 \\ 2x & + & (k-2)\,y & & & = & k^2+1 \\ 2kx & & & + & k^2 z & = & 8k^2+4k \end{array}\right\}$$

(6 punts)

2) Donat el paral·lelepípede de la figura



considerem la referència afí $R=\left\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right\}$, aleshores els vèrtexs tenen coordenades molt fàcils:
A (0,0,0), B (1,0,0), C (1,1,0), D (0,1,0)
A' (0,0,1), B' (1,0,1), C' (1,1,1), D' (0,1,1)

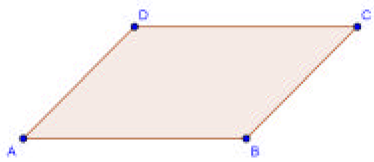
a) Trobeu el punt mig de les quatre diagonals, és a dir dels segments: $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$ i $\overline{DB'}$. Enuncia la propietat general dels paral·lepípedes que acabes de trobar?
b) Trobeu el baricentre (G) del paral·lelepípede [és a dir el punt d'equilibri o centre de massa dels 8 vèrtexs]. Enuncia la propietat general dels paral·lepípedes que acabes de trobar?

(0,5+0,5=1 punt)

3) Donats els punts A(2,4,2a), B(1,2,17), C(5,10,5) trobeu el valor de a per a que estiguin alineats

(1 punt)

4) Donats els punts A(0,0,3), B(a,b,1), C(5,b+1,0) i D(3,1,a) en una referència ortonormal . Trobeu els valors de "a" i "b" per tal que:
a) ABCD sigui un paral·lelogram
b) ABCD sigui un rectangle



(0,5+0,5=1 punt)

5)
a) Què és una base d'un espai vectorial?
b) Demostra que les components d'un vector en una base de vectors fixada són úniques.

(1 punt)

Solució

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) **Utilitzant determinants** discuteix la compatibilitat d'aquest sistema segons els valors del paràmetre **"k"** i soluciona'l en els casos que sigui possible (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{rcccccl} 2x & + & (k-2)y & + & k\,z & = & k^2+8k+1 \\ 2x & + & (k-2)\,y & & & = & k^2+1 \\ 2k\,x & & & + & k^2 z & = & 8k^2+4k \end{array}\right\}$$

(6 punts)

Primer de tot calcularem el determinant de la matriu A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k-2 & k \\ 2 & k-2 & 0 \\ 2k & 0 & k^2 \end{vmatrix} \underset{Factor\ C3}{\overset{Factor\ C1\ i\ C2}{=}} 2(k-2)k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} =$$

$$= 2(k-2)k\,(k-k-k) = -2(k-2)k^2$$

Així doncs tenim tres casos
I) k $\neq$ 0, 2
II) K= 0
III) K= 2
Anem a discutir-los i solucionar-los, cas de ser possible, de forma individual:

I) k $\neq$ 0, 2

Com el |A| $\neq$ 0 sabem que el Rang(A)=3,
Rang(Ampl) $\geq$ Rang(A)=3 i com Ampl té només 3 files $\Rightarrow$ Rang(Ampl)=3

així doncs és Sistema Compatible (SC) i com el número d'incògnites també és 3 $\Rightarrow$ és SCD i la solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k^2+8k+1 & k-2 & k \\ k^2+1 & k-2 & 0 \\ 8k^2+4k & 0 & k^2 \end{vmatrix}}{-2(k-2)k^2} \underset{factor C3}{\overset{factor C2}{=}} \frac{\cancel{(k-2)}\,\cancel{k} \begin{vmatrix} k^2+8k+1 & 1 & 1 \\ k^2+1 & 1 & 0 \\ 8k^2+4k & 0 & k \end{vmatrix}}{-2\cancel{(k-2)}\,k^{\cancel{2}}} \overset{F1-F2}{=}$$

$$= \frac{(k-2)k \begin{vmatrix} 8k & 0 & 1 \\ k^2+1 & 1 & 0 \\ 8k^2+4k & 0 & k \end{vmatrix}}{-2(k-2)k^2} \overset{Desen\ C2}{=} \frac{\begin{vmatrix} 8k & 1 \\ 8k^2+4k & k \end{vmatrix}}{-2k} = \frac{\cancel{8k^2} - \cancel{8k^2} - 4k}{-2k} = 2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & k^2+8k+1 & k\\ 2 & k^2+1 & 0\\ 2k & 8k^2+4k & k^2\end{vmatrix}\begin{matrix}factorC1\\ factorC3\end{matrix}}{-2(k-2)k^2}=\frac{\cancel{2}\,\cancel{k}\begin{vmatrix}1 & k^2+8k+1 & 1\\ 1 & k^2+1 & 0\\ k & 8k^2+4k & k\end{vmatrix}C1-C3}{-\cancel{2}(k-2)k^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}0 & k^2+8k+1 & 1\\ 1 & k^2+1 & 0\\ 0 & 8k^2+4k & k\end{vmatrix}Desen\ C1}{-(k-2)k}=\frac{-\begin{vmatrix}k^2+8k+1 & 1\\ 8k^2+4k & k\end{vmatrix}}{-(k-2)k}=\frac{k^3+8k^2+k-8k^2-4k}{(k-2)k}=$$

$$=\frac{k^3-3k}{(k-2)k}=\frac{k^2-3}{(k-2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & k-2 & k^2+8k+1\\ 2 & k-2 & k^2+1\\ 2k & 0 & 8k^2+4k\end{vmatrix}\begin{matrix}factorC1\\ factorC2\end{matrix}}{-2(k-2)k^2}=\frac{\cancel{2}\,\cancel{(k-2)}\begin{vmatrix}1 & 1 & k^2+8k+1\\ 1 & 1 & k^2+1\\ k & 0 & 8k^2+4k\end{vmatrix}C1-C2}{-\cancel{2}\,\cancel{(k-2)}\,k^2}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & k^2+8k+1\\ 0 & 1 & k^2+1\\ k & 0 & 8k^2+4k\end{vmatrix}Desen\ C1}{-k^2}=\frac{\cancel{k}\begin{vmatrix}1 & k^2+8k+1\\ 1 & k^2+1\end{vmatrix}}{-k^{\cancel{2}}}=\frac{k^2+1-k^2-8k-1}{-k}=$$

Així

$$=\frac{-8k}{-k}=8$$

doncs la solució del SCD és : $x=2;\ y=\dfrac{k^2-3}{k-2};\ z=8$

II) K= 0

El sistema és aquest

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ **F3 es pot eliminar i F1=F2 així doncs podem dir que**

Rang(A)=Rang (ampl)=1 $\Rightarrow$ **Sistema Compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat**

Agafem com a incònites lliures la y i z així doncs:

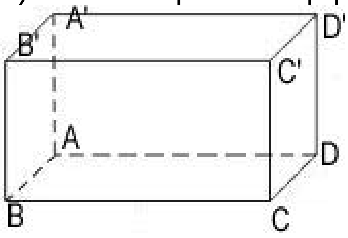
2x = 1+2y $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+2y}{2} \\ y = y & \forall y \in R \\ z = z & \forall z \in R \end{cases}$

III) K= 2

El sistema és aquest $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 21 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 40 \end{array}\right) F3-2F1 \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 21 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Observant F3 tenim que és clarament Sistema Incompatible (SI)

2) Donat el paral·lelepípede de la figura



considerem la referència afí $R = \left\{ A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'} \right\}$,

aleshores els vèrtexs tenen coordenades molt fàcils:
A (0,0,0), B (1,0,0), C (1,1,0), D (0,1,0)
A' (0,0,1), B' (1,0,1), C' (1,1,1), D' (0,1,1)

a) Trobeu el punt mig de les quatre diagonals, és a dir dels segments: $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$ i $\overline{DB'}$. Enuncia la propietat general dels paral·lepípedes que acabes de trobar?
b) Trobeu el baricentre (G) del paral·lelepípede [és a dir el punt d'equilibri o centre de massa dels 8 vèrtexs]. Enuncia la propietat general dels paral·lepípedes que acabes de trobar?

(0,5+0,5=1 punt)

a)

El punt mig de $\overline{AC'}$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

El punt mig de $\overline{BD'}$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

El punt mig de $\overline{CA'}$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

El punt mig de $\overline{DB'}$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Així doncs podem dir que les 4 diagonals d'un paral·lelepípede és tallen en un mateix punt.

b) $G\left(\frac{4}{8}, \frac{4}{8}, \frac{4}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$**, així dons podem dir que les diagonals d'un paral·lelepíped es tallen en el Baricentre de la figura.**

3) Donats els punts A(2,4,2a), B(1,2,17), C(5,10,5) trobeu el valor de a per a que estiguin alineats

A, B i C estan alineats $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AC}$ **són LD** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -2, 17 - 2a)$ *i* $\overrightarrow{AC} = (3, 6, 5 - 2a)$ **són LD** $\Leftrightarrow$

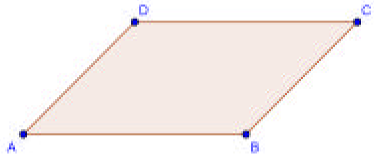
$$\Leftrightarrow \frac{-1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{17 - 2a}{5 - 2a} \Leftrightarrow -5 + 2a = 51 - 6a \Leftrightarrow 8a = 56 \Leftrightarrow a = 7$$

(1 punt)

4) Donats els punts A(0,0,3), B(a,b,1), C(5,b+1,0) i D(3,1,a) en una referència ortonormal . Trobeu els valors de "a" i "b" per tal que:

a) ABCD sigui un paral·lelogram

b) ABCD sigui un rectangle



(0,5+0,5=1 punt)

a) Només cal que demostrem que:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *i* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **i si calculem les components d'aquests vectors i les igualem resulta fàcil:**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a,b,-2) \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (2,b,-a) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow a = 2 \;\; i \;\; b \;\; qualsevol \;\; valor$$

I comprovant també l'altra igualtat de vectors tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (3,1,a-3) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5-a,1,-1) \end{array}\right\} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow a = 2 \;\; i \;\; b \;\; qualsevol \;\; valor$$

Així doncs cal que a= –3

b) A més de que sigui un paral·lelogram també ha de passar que els angles siguin rectes, és a dir que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ *i* $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} = (a,b,-2) = (2,b,-2) \perp \overrightarrow{AD} = (3,1,a-3) = (3,1,-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow (2,b,-2)\cdot(3,1,-1) = 0 \Leftrightarrow 6 + b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -8$$

I per aquests valors a=2 i b= –8 es pot comprovar que també es verifica que

$$\overrightarrow{DA} = (-3,-1,1) \perp \overrightarrow{DC} = (2,-8,-2) \;\; ja \;\; que \;\; (-3,-1,1)\cdot(2,-8,-2) = -6 + 8 - 2 = 0$$

5)

a) Què és una base d'un espai vectorial?
b) Demostra que les components d'un vector en una base de vectors fixada són úniques.

(1 punt)

a) Una base és un conjunt de vectors que són linealment independents i que generen tots els vector de l'espai vectorial (és a dir que qualsevol vector de l'espai vectorial és combinació lineal d'ells.

b) Sigui una base de l'espai vectorial $B=\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},....,\overrightarrow{e_n}\right\}$

Qualsevol vector $\overrightarrow{X}$ es combinació lineal dels elements de la base.

Suposem que el vector $\overrightarrow{X}$ té dues components en la base B

$\vec{x}=(x_1,x_2,.....,x_n)\ i\ \vec{x}=(y_1,y_2,.....,y_n)\Rightarrow$

$x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+.....+x_n\overrightarrow{e_n}=\vec{x}=y_1\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}+.....+y_n\overrightarrow{e_n}\Rightarrow$ **però però**

$\Rightarrow(x_1-y_1)\overrightarrow{e_1}+(x_2-y_2)\overrightarrow{e_2}+.....+(x_n-y_n)\overrightarrow{e_n}=\vec{0}$

com $B=\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},....,\overrightarrow{e_n}\right\}$ **és una base i per tant són línealment independents tenim que tota combinació lineal d'ells que dóna el vector zero és la trivial.**

Així doncs:

són úniques tenim que $x_1=y_1,\ x_2=y_2,.....,\ \ x_n=y_n$ **com volíem demostrar**