Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Àlgebra II + Geometria I

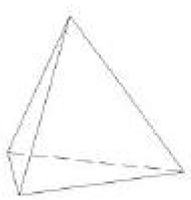
Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) **Utilitzant determinants** discuteix la compatibilitat d'aquest sistema segons els valors del paràmetre "m" i soluciona'l en els casos que sigui possible (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m^2+m+1 \\ & & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m^2+m \\ 2x & + & & + & (2m-2)z & = & m+3 \end{array}$$

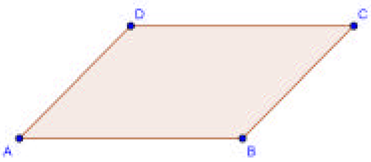
(6 punts)

2) Donats 4 punt no coplanaris que anomeno O, A, B i C puc agafar com a referència de l'espai $R=\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$. D'aquesta forma els punts tenen unes coordenades molt fàcils O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0) i C(0,0,1) i podem descobrir molt ràpidament propietats dels tetràedres en general.
   a) Trobeu el baricentre (G) del tetràedre [és a dir el punt d'equilibri o centre de massa dels 4 vèrtexs]
   b) Trobeu el baricentre del triangle de la cara ABC que anomenem G_0
   c) Demostreu que els 3 punts O, G i G_0 estan alineats i digueu quin és el valor de k tal que $\overrightarrow{OG}=K\overrightarrow{OG_o}$



(0,25+0,25+0,5 = 1 punt)

3) Trobeu el valor del paràmetre "a" per a que els 4 punts A(3,a,0), B(1,5,8), C(9,13,10) i D(11,5,2) formin el paral·lelogram ABCD



(1 punt)

4) Donats els punts A(1,0,2), B(0,2,6), C(2,1,4) i D(2,0,a)
   a) discutiu si són o no coplanaris segons el valor del paràmetre "a"
   b) Trobeu el punt simètric del punt A respecte el punt B

(0,5+0,5 = 1 punt)

5) Fixada una referència de l'espai (R^3)
   a) Defineix les coordenades d'un punt X
   b) Demostra que les coordenades d'un punt són úniques

(0,5+0,5 = 1 punt)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) **Utilitzant determinants** discuteix la compatibilitat d'aquest sistema segons els valors del paràmetre "m" i soluciona'l en els casos que sigui possible (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m^2+m+1 \\ & & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m^2+m \\ 2x & + & & + & (2m-2)z & = & m+3 \end{array}$$

(6 punts)

Com la matriu del sistema (A) és quadrada, primer de tot calcularem el determinant de la matriu A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & m-1 \\ 0 & m+1 & m-1 \\ 2 & 0 & 2(m-1) \end{vmatrix} \underset{Factor\ d\ e\ C3}{\overset{Factor de C2}{=}} (m+1)(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (m+1)(m-1)(2+2-2) = 2(m+1)(m-1)$$

Així doncs tenim tres casos

I) m $\neq -1, 1$

II) m= -1

III) m= 1

Anem a discutir-los i solucionar-los, cas de ser possible, de forma individual:

I) m $\neq -1, 1$

Com el |A| $\neq 0$ sabem que el Rang(A)=3,
Rang(Ampl) $\geq$ Rang(A)=3 i com Ampl té només 3 files $\Rightarrow$ Rang(Ampl)=3

així doncs és Sistema Compatible (SC) i com el número d'incògnites també és 3 $\Rightarrow$ és SCD i la solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m^2+m+1 & m+1 & m-1 \\ m^2+m & m+1 & m-1 \\ m+3 & 0 & 2(m-1) \end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)} \overset{F1-F2}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m^2+m & m+1 & m-1 \\ m+3 & 0 & 2(m-1) \end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)} =$$

$$\overset{Desen F1_1}{=} \frac{\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ 0 & 2(m-1) \end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)} = \frac{(m+1)2(m-1)}{2(m+1)(m-1)} = 1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & m^2+m+1 & m-1\\ 0 & m^2+m & m-1\\ 2 & m+3 & 2(m-1)\end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)} \overset{F1-F2}{=} \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & m^2+m & m-1\\ 2 & m+3 & 2(m-1)\end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)}=$$

$$=\frac{(m^2+m)(2m-2)+2m-2-(m+3)(m-1)}{2(m+1)(m-1)}=$$

$$=\frac{2m^3-\cancel{2m^2}+\cancel{2m^2}-\cancel{2m}+\cancel{2m}-2-m^2+m-3m+3}{2(m+1)(m-1)}=\frac{2m^3-m^2-2m+3}{2(m+1)(m-1)}=$$

$$=\frac{2m^3-m^2-2m+1}{2(m+1)(m-1)}=\frac{2(m+1)(m-1)\left(m-\frac{1}{2}\right)}{2(m+1)(m-1)}=m-\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & m+1 & m^2+m+1\\ 0 & m+1 & m^2+m\\ 2 & 0 & m+3\end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)} \overset{F1-F2}{=} \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & m+1 & m^2+m\\ 2 & 0 & m+3\end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)}=$$

$$\overset{DesenC2}{=}\frac{(m+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & m+3\end{vmatrix}}{2(m+1)(m-1)}=\frac{(m+1)(m+1)}{2(m+1)(m-1)}=\frac{(m+1)}{2(m-1)}$$

Així doncs la solució del SCD és :

$$x=1;\ y=m-\frac{1}{2};\ z=\frac{m+1}{2(m-1)}$$

II) m= –1

El sistema és aquest

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -4 & 2\end{array}\right)$$

- **Rang(A)**

com tenim que $M_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow$ **Rang(A) $\geq$2, però com |A|=0 ja sabem que Rang(A)<3 així doncs Rang(A)=2**

- **Rang(Ampl)**

Orlem el $M_2\neq 0$ amb la Columna de termes independents i la F3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \overset{c1=c3}{=} 0 \Rightarrow$$ **Rang(Ampli)=2**

Així doncs com Rang(A)=Rang(Ampli)=2 i número d'incògnites és 3 és un Sistema Compatible Indeterminat (SCI) amb 1 grau de llibertat.

Com $M_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ La 2a columna que no intervé en ell és la que deixem lliure i la passem a l'altre membre com a paràmetre. Així $\forall y \in R$

Obtenint així el sistema següent:

$$\begin{array}{cc} x & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$ **que considerat com a sistema de 2 equacions i 2 incògnites (x, z) és un sistema de cramer (SCD) i que per tant podem solucionar amb la regla de Cramer:**

$$y = l \quad \forall l \in R; \; x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} = 1; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} = 0$$

Així doncs les infinites solucions d'aquest SCI són X= 1; $y = l$ **i Z=0** $\forall y \in R$

III) m= 1

El sistema és aquest

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

- **Rang(A)**

com tenim que $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ **Rang(A)** $\geq$ **2, però com |A|=0 ja sabem que és <3**

així doncs Rang(A)=2

- **Rang(Ampl)**

Orlem el M2$\neq$0 amb la Columna de termes independents i la F3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 8 - 12 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$ **Rang(Ampl)=3**

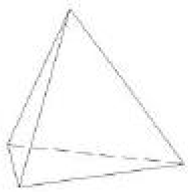
així doncs com Rang(A) $\neq$ Rang(Ampl) $\Rightarrow$ Sistema Incompatible (SI)

2) Donats 4 punt no coplanaris que anomeno O, A, B i C puc agafar com a referència de l'espai $R = \left\{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right\}$. D'aquesta forma els punts tenen unes coordenades molt fàcils O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0) i C(0,0,1) i podem descobrir molt ràpidament propietats dels tetràedres en general.

a) Trobeu el baricentre (G) del tetràedre [és a dir el punt d'equilibri o centre de massa dels 4 vèrtexs]

b) Trobeu el baricentre del triangle de la cara ABC que anomenem G_0

c) Demostreu que els 3 punts O, G i G_0 estan alineats i digueu quin és el valor de k tal que $\overrightarrow{OG} = K\overrightarrow{OG_o}$



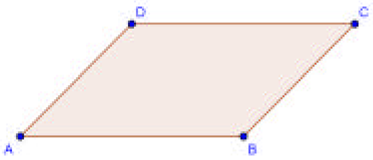
(0,25+0,25+0,5 = 1 punt)

a) $G\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ **b)** $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

c) Només cal observar que

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \; i \; \overrightarrow{OG_o} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG_o} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

3) Trobeu el valor del paràmetre "a" per a que els 4 punts A(3,a,0), B(1,5,8), C(9,13,10) i D(11,5,2) formin el paral·lelogram ABCD



(1 punt)

Només cal que demostrem que:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \; i \; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **i si calculem les components d'aquests vectors i les igualem resulta fàcil:**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2, 5-a, 8) \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (-2, 8, 8) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow a = -3$$

I comprovant també l'altra igualtat de vectors tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (8, 5-a, 2) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (8, 8, 2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow a = -3$$

Així doncs cal que a= –3

També es pot solucionar imposant que $\overrightarrow{AB} \; i \; \overrightarrow{DC}$ **són Linealment Dependents (LD) i que també** $\overrightarrow{AD} \; i \; \overrightarrow{BC}$ **són Linealment Dependents (LD)**

4) Donats els punts A(1,0,2), B(0,2,6), C(2,1,4) i D(2,0,a)
   a) discutiu si són o no coplanaris segons el valor del paràmetre "a"
   b) Trobeu el punt simètric del punt A respecte el punt B

(0,5+0,5 = 1 punt)

a) A, B, C i D són coplanaris $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ i } \overrightarrow{AD}$ **són LD**

I com són vectors que V_3 només cal imposar que el determinant d'ells tres dóna zero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = -a+2+4-4-2a+4 = -3a+6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

així doncs A, B, C i D són coplanaris $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ i } \overrightarrow{AD}$ **són LD** $\Leftrightarrow$ **a=2**

b) Sigui X(x,y,z) el punt buscat.

Imposant per exemple que B és el punt mig del segment $\overline{XA}$ **tenim que**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} &= 0 \\ \frac{y+0}{2} &= 2 \\ \frac{z+2}{2} &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -1;\ y = 4;\ z = 10 \Rightarrow X(-1,4,10)$$

5) Fixada una referència de l'espai (R^3)
   a) Defineix les coordenades d'un punt X
   b) Demostra que les coordenades d'un punt són úniques

(0,5+0,5 = 1 punt)

Sigui la referència de R^3 $R = \left\{ O(puntorigen); \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} (basede V_3) \right\}$

a) Les coordenades del punt X (x,y,x) són les components del seu vector posició $\overrightarrow{OX}$ **en la base** $\left\{ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \right\}$

b) Si $X(x_1,y_1,z_1)$ i $X(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{OX} = (x_1,y_1,z_1)$; $\overrightarrow{OX} = (x_2,y_2,z_2)$; **però com** $\left\{ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \right\}$ **és una base de V_3 i les components d'un vector en una base són úniques tenim que** $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$ **com volíem demostrar**