



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les corbes

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 4 \\ y = 3 \\ y = x + 2 \end{array} \right\}$$

- Feu el dibuix de la regió corresponent del pla limitada per aquestes tres corbes (la que té per frontera les tres)
- Calculeu la seva àrea
- Si revolucioneu aquesta regió al voltant de la recta $Y=3$ obtenim un cos de revolució. Quin és el volum d'aquest cos?

(0,5+1+1,5=3 punts)

- 2) **Utilitzant els mètode de Gauss** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left. \begin{array}{l} x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + 2z = 1 \\ x + my + (m+3)z = 2m-1 \end{array} \right\}$$

(5,5 punts)

- 3) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculeu la matriu X tal que $A \times B = C - D$

(1,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les corbes

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 4 \\ y = 3 \\ y = x + 2 \end{array} \right\}$$

- Feu el dibuix de la regió corresponent del pla limitada per aquestes tres corbes (la que té per frontera les tres)
- Calculeu la seva àrea
- Si revolucioneu aquesta regió al voltant de la recta $Y=3$ obtenim un cos de revolució. Quin és el volum d'aquest cos?

(0,5+1+1,5=3 punts)

① Busquem els pts de tall de les 3 corbes continues entre si

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} y = -x^2 + 4 \\ \textcircled{2} y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x^2 + 4 = 3 \\ 1 = x^2 \\ x = \pm \sqrt{1} = \pm 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{PTS } (1, 3) \\ (-1, 3) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} y = -x^2 + 4 \\ \textcircled{3} y = x + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x^2 + 4 = x + 2 \\ -x^2 - x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ x = \frac{-1 \pm 3}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{PUNTS} \\ (1, 3) \\ (-2, 0) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{2} y = 3 \\ \textcircled{3} y = x + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 = x + 2 \\ 1 = x \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{PT. } (1, 3) \end{array} \right\}$$

I les què/ques són clares ja que

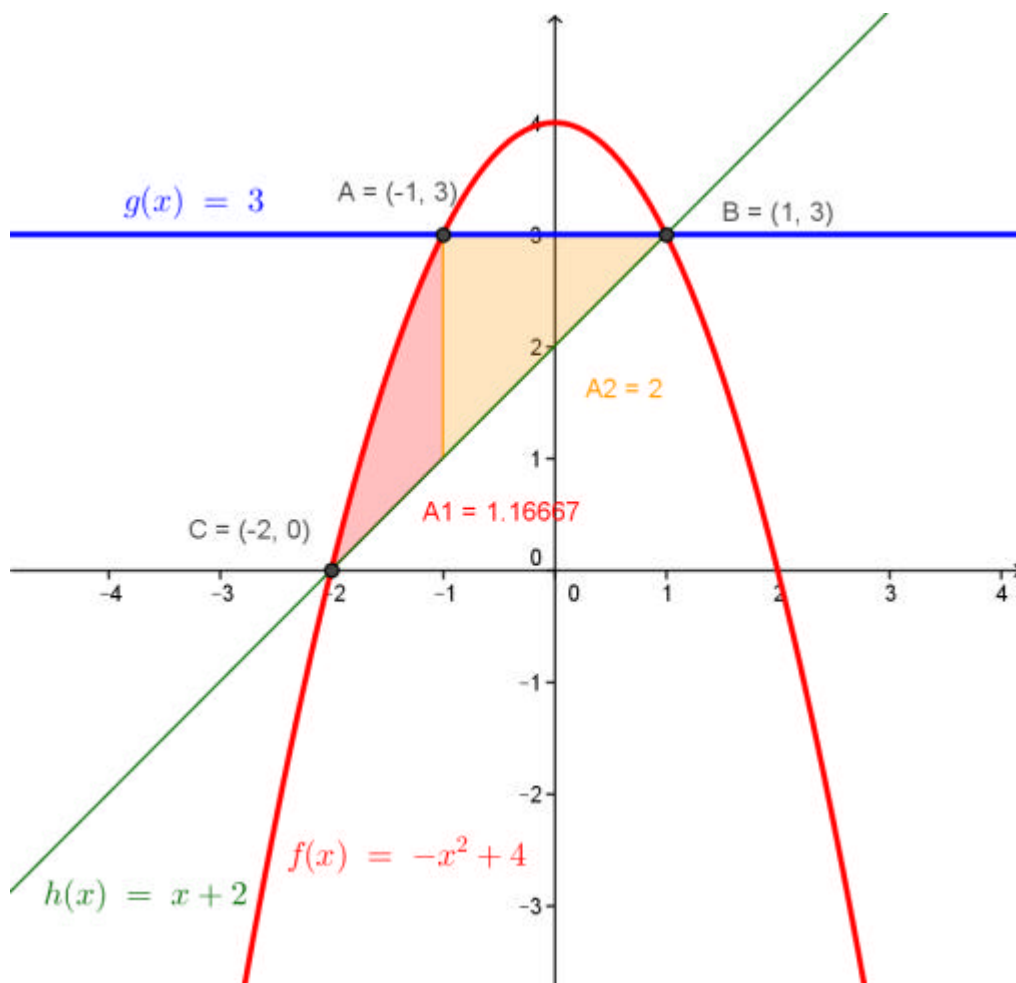
① $y = -x^2 + 4$ és una paràbola amb branques cap a baix ja que $a = -1 < 0$ que talla l'eix $Ox (y=0)$ en $x = \pm \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow (-2, 0)$ i $(0, 2)$
I que té el vèrtex en $x = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow (0, 4)$

x	y
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0

② $y = 3$ és la Recta Horitz. pel pt $(0, 3)$

③ $y = x + 2$ Recta amb pendent positiva $m=1$

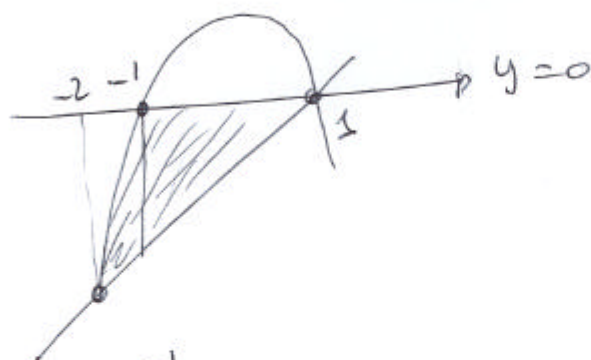
x	y
0	2
1	3
-2	0



$$\begin{aligned}
 b) \quad A &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 4 - (x + 2)) dx + \int_{-1}^1 (3 - (x + 2)) dx = \\
 &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 - x + 2) dx + \int_{-1}^1 (-x + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{-1} + \\
 &+ \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \right] + \left[\left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \\
 &= \left(-\frac{7}{3} - \frac{1}{2} + 4 \right) + 2 = \frac{7}{6} + 2 = \underline{\underline{\frac{19}{6} \text{ u}^2}}
 \end{aligned}$$

c) Com l'eix de revolució en $y=3$ cal baixar
TOTES les corbes 3 UNITATS respecte $y=0$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 4 - 3 = -x^2 + 1 \\ y = 3 - 3 = 0 \\ y = x + 2 - 3 = x - 1 \end{array} \right\} \text{I el volum queda així}$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{-1} (x-1)^2 - (-x^2+1)^2 dx + \pi \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx = \\ &= \pi \int_{-2}^{-1} \cancel{x^2} - 2x + 1 - (\cancel{x^4} - 2\cancel{x^2} + 1) dx + \pi \int_{-1}^1 x^2 - 2x + 1 dx = \\ &= \pi \int_{-2}^{-1} -x^4 + 3x^2 - 2x dx + \pi \int_{-1}^1 x^2 - 2x + 1 dx = \\ &= \pi \left[\left[-\frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{-1}^1 \right] = \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{5} - 1 - 1 \right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 4 \right) + \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 - 1 \right) \right] = \\ &= \pi \left[\left(10 - \frac{31}{5} \right) + \left(\frac{2}{3} + 2 \right) \right] = \pi \left(\frac{19}{5} + \frac{8}{3} \right) = \frac{97}{15} \pi \text{ u}^3 \end{aligned}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

2) Utilitzant els mètode de Gauss discutiu i resolcu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left. \begin{array}{l} x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + 2z = 1 \\ x + my + (m+3)z = 2m-1 \end{array} \right\}$$

(5,5 punts)

$$\textcircled{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m-1 & 3 & 1 \\ 1 & m & 2 & 1 \\ 1 & m & m+3 & 2m-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R}_2 - \text{R}_1, \text{R}_3 - \text{R}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m-1 & 3 & 1 \\ 0 & m-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 & 2m-2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{F2} - \text{F1} \\ \text{F3} - \text{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 & 2m-2 \end{array} \right)$$

$$\boxed{\text{CAS I}} \left\{ \begin{array}{l} m \neq 1, -1 \\ \text{Rg}(A) = 3 \\ \text{Rg}(A_{\text{aug}}) = 3 \\ \text{No INCÒG} = 3 \end{array} \right\} \text{S.C} \left. \vphantom{\begin{array}{l} m \neq 1, -1 \\ \text{Rg}(A) = 3 \\ \text{Rg}(A_{\text{aug}}) = 3 \\ \text{No INCÒG} = 3 \end{array}} \right\} \text{SCD}$$

La solució s'obté aïllant en cascada

$$\text{F3} \Rightarrow z = \frac{2m-2}{m+1} = \frac{2(m-1)}{m+1}$$

$$\text{F2} \Rightarrow (m-1)y = -z$$

$$y = \frac{-2(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{-2}{m+1}$$

$$\text{F1} \Rightarrow x = 1 - 2z - my$$

$$x = 1 - \frac{4m-4}{m+1} + \frac{2m}{m+1} = \frac{m+1-4m+4+2m}{m+1}$$

$$x = \frac{-m+5}{m+1}$$

$$\Rightarrow \text{LA SOLUCIÓ ÉS } x = \frac{-m+5}{m+1}; y = \frac{-2}{m+1}; z = \frac{2(m-1)}{m+1}$$

CAS II } $m=1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$ Acabem d'aplaonar
F3-2F2

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Rg(A)=2 \\ Rg(A_{\text{apl}})=2 \\ N^{\circ} \text{ INC} = 3 \end{array} \right\} \text{S.C.} \left\{ \begin{array}{l} \text{S.C.I amb} \\ 1 \text{ grau de} \\ \text{libertat} \end{array} \right.$

Aga/p com a incògnita lliure per exemple la y

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{cc} x & z \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1-y \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} z=0 \\ x=1-y \end{array} \end{array}$

$\Rightarrow$ LES SOLUCIONS s'ón

$\left. \begin{array}{l} x=1-y \\ y=y \\ z=0 \end{array} \right\} \forall y \in \mathbb{R} \quad 0$

$\left. \begin{array}{l} x=1-d \\ y=d \\ z=0 \end{array} \right\} \forall d \in \mathbb{R}$

CAS III } $m=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{S.I.}$

0 Raonant amb Rang també ja que

$\left. \begin{array}{l} Rg(A)=2 \\ Rg(A_{\text{apl}})=3 \end{array} \right\} \text{S.I.}$

3) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculeu la matriu X tal que $A \cdot X \cdot B = C - D$

(1,5 punts)

3

$$A \cdot X \cdot B = C - D$$

Si $\exists A^{-1}$ i $\exists B^{-1}$ podem aïllar la X així

$$\underbrace{A^{-1} A}_I \cdot X \cdot \underbrace{B B^{-1}}_I = A^{-1} (C - D) \cdot B^{-1}$$

$$X = A^{-1} (C - D) B^{-1}$$

$\exists A^{-1}$? Problem de calcular les inverses per GAUSS-JORDAN
 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) F2 - F1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\exists B^{-1}$? $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) F2 - F1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{I segons en quin ordre multipliquem:}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$