



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) **Utilitzant determinants** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left. \begin{array}{rrcr} 2x & - & ky & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & k+3 \\ kx & + & ky & + & (k+1)z & = & -1 \end{array} \right\}$$

(5,5 punts)

- 2) Troba X de manera que $A X = 2 B$,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant determinants.

(2,5 punts)

- 3) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

- Si A és la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i el seu rang coincideix amb el número d'incògnites aleshores el sistema és compatible. I cas de ser cert quantes solucions tindria?
- Si Ampl és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals i el $\text{Rang}(\text{Ampl}) = \text{Número de incògnites}$ aleshores és SCD
- Escriu un sistema de 3 equacions lineals que sigui compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
- Completa el sistema de l'apartat anterior (c) amb una equació més per tal que sigui compatible determinat.

(1 punt)

- 4) Calculeu el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

(1 punt)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) **Utilitzant determinants** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left. \begin{array}{rrcr} 2x & - & ky & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & k+3 \\ kx & + & ky & + & (k+1)z & = & -1 \end{array} \right\}$$

(5,5 punts)

① Com A és quadrada comencem calculant |A|
Però abans de començar veig una transformació de
GAUSS que aconseguiré zero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -k & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & k+3 \\ k & k & k+1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -k & 1 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 & k+3 \\ k & k & k+1 & -1 \end{array} \right)$$

$$|A| \xrightarrow{\text{Desenvolup per } F2} (k+3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & k+1 \end{vmatrix} = (k+3)(2k+2-k) =$$

$$= (k+3)(k+2)$$

CAS I $\hookrightarrow k \neq -3; -2 \Rightarrow \begin{cases} R_5(A) = 3 \\ R_5(A_{\text{aug}}) \geq R_5(A) = 3 \\ \text{Ampl } \text{en } 3 \times 4 \Rightarrow R_5(A_{\text{aug}}) \leq 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} R_5(A) = 3 \\ R_5(A_{\text{aug}}) = 3 \end{cases} \text{ SCD}$ $\pm$ la solució la trobem aplicant Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k & 1 \\ k+3 & k+3 & 0 \\ -1 & k & k+1 \end{vmatrix}}{(k+3)(k+2)} \xrightarrow{\text{Factor comú de } F2} \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & k & k+1 \end{vmatrix}}{(k+3)(k+2)}$$

$$= \frac{0+0+k+1+k^2+k-0}{k+2} = \frac{k^2+2k+1}{k+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & k+3 & 0 \\ k & -1 & k+1 \end{vmatrix}}{(k+3)(k+2)} \xrightarrow{\text{Desenvolup per } F2} \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & k+1 \end{vmatrix}}{(k+3)(k+2)} = \frac{2k+2-k}{k+2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -k & 0 \\ 0 & k+3 & k+3 \\ k & k & -1 \end{vmatrix}}{(k+3)(k+2)} \xrightarrow{\text{Factor comú de } F2} \frac{\begin{vmatrix} 2 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & k & -1 \end{vmatrix}}{(k+3)(k+2)} = \frac{-2-k^2+0-0-0-k}{(k+2)}$$

$$z = \frac{-k^2-2k-2}{k+2}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

CAS II $K = -3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow R_3(A) \leq 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2 \text{ sobra en L.D.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Com $\Delta_2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3 \neq 0 \Rightarrow R_3(A) \geq 2$
I com $R_3(A) \leq 2 \Rightarrow R_3(A) = 2$

$R_{\text{ang}}(A_{\text{red}}) \geq R_3(A) = 2$
I la $A_{\text{red}} 2 \times 3 \Rightarrow R_3(A_{\text{red}}) \leq 2$
 $R_3(A_{\text{red}}) = 2$
INC = 3 S.I. amb grau de llib.

INCÒGNITA LLIBRE la $x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

y, z
 $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 - 2x \\ -3 & -2 & -1 + 3x \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} x = x \\ y = \frac{\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 3x-1 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4x-3x+1}{-3} = \frac{x+1}{-3} \end{matrix}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2x \\ -3 & 3x+1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{9x+3-6x}{-3} = \frac{3x+3}{-3} = -x-1$

CAS III $K = -2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow R_3(A) < 3$
 $R_3(A) = 2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right)$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow R_3(A) \geq 2$
want $\Delta_2 \neq 0$ amb B^* i F3 tenir menys aquest dat

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow R_3(A_{\text{red}}) = 3$
 $\Rightarrow$ S.I.



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

2) Troba X de manera que $A X = 2 B$,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant determinants.

(2,5 punts)

$$\begin{aligned} A X &= 2 B \\ \exists A^{-1} &\Rightarrow X = A^{-1} 2 B \\ A^{-1} A X &= A^{-1} 2 B \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

esta invertible.

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & +1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj}(A))^T}{|A|} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \\ 1 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 5 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -5 \\ 1 & -15 \end{pmatrix}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

3) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

- a) Si A és la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i el seu rang coincideix amb el número d'incògnites aleshores el sistema és compatible. I cas de ser cert quantes solucions tindria?
- b) Si $Ampl$ és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals i el $Rang(Ampl) = \text{Número de incògnites}$ aleshores és SCD

3) a) $Rg(A) = n = \text{N}^{\circ} \text{ INC}$
 $n \text{ columnes } (= \text{N}^{\circ} \text{ INC.}) \quad \Rightarrow Rg(A) \text{ és el màxim}$
 $\exists n_m \neq 0$
 Podem assegurar que $Rg(A_{pl})$ també sigui n ?
 No per exemple

$$\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}$$

 $\Rightarrow$ No podem assegurar que sigui COMPATIBLE.
 És un CONTRAEXEMPLE
 per a $a \neq 0$ i $b \neq 0$ veiem $Rg(A) = n = Rg(A_{pl}) \} \text{ S.C.D.}$
 $n^{\circ} \text{ INC.}$

b) $Rg(A_{pl}) = n = \text{N}^{\circ} \text{ d'INC.}$
 $Rg(A) \leq Rg(A_{pl})$ però no hi ha cap garantia de que siguin iguals per exemple

$$\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} Rg(A_{pl}) = 2 \\ Rg(A) = 1 \end{array}$$

 És un CONTRAEXEMPLE



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- c) Escriu un sistema de 3 equacions lineals que sigui compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
- d) Completa el sistema de l'apartat anterior (c) amb una equació més per tal que sigui compatible determinat.

(1 punt)

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \leftarrow \text{Suma } F_1 + F_2 \Rightarrow R_3(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_3(A) \geq 2$$

S.C.I amb 1 grau de llibertat

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad F_3 = F_1 + F_2$$

INC. LLIBRE la 2
 $\forall z \in \mathbb{R}$

A no s'ha la 2.

El sistema ja queda S.C.D

Podem veure que el $R_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} R_3(A) = 3 \\ R_3(A_{pl}) = 3 \\ 3 \text{ INC} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{SCD}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

4) Calculeu el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

(1 punt)

④

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} C2-C1 \\ C3-C1 \\ C4-C1 \\ C5-C1 \\ C6-C1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

És com en triangular

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$$