



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) **Utilitzant determinants** discutiu i resolcu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & k \end{array} \right.$$

(5,5 punts)

- 2) Troba X de manera que $A X - 2 B = C$

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant determinants.

(2,5 punts)

- 3) Donades les equacions:
- $$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{array} \right.$$

- Com és aquest sistema? (SCD, SCI o SI)
- Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui incompatible.
- Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui compatible determinat.

Justifica en cada cas el procediment que has fet servir.

(0,5 punts)

- 4) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

- Si A és una matriu de $\text{Rang}(A)=3$ tots els seus menors d'ordre 2 són diferents de zero.
- Si Ampl és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals i el $\text{Rang}(\text{Ampl})$ és menor que el número d'incògnites el sistema és incompatible.

(0,5 punts)

- 5) Calculeu el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

(1 punt)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) **Utilitzant determinants** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

(5,5 punts)

① Com A_{red} és quadrada comencem per $|A_{\text{red}}|$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} F1-F2 \\ F2-F4 \\ F3-F4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} C4+C1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Desen F1} \\ = (k-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{Rec factor comú} \\ \text{de F1, F2} \end{matrix} (k-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-1)^3 [k+1+0+0+1-0+1] = (k-1)^3 (k+3)$$

CAS I $k \neq 1, -3$ $|A_{\text{red}}| \neq 0 \Rightarrow R_3(A_{\text{red}}) = 4$ S.I
 $R_3(A) \leq 3$

CAS II $k=1$ $|A_{\text{red}}|=0 \Rightarrow R_3(A_{\text{red}}) < 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F2=F3=F4=F1 \\ \text{Sobren 3 files} \\ \begin{matrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \Rightarrow \text{S.C.I amb 2 graus de llibertat}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

Per exemple $\forall y \in \mathbb{R}$
 $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall y \in \mathbb{R} \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{array}$$

CAS III $K = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$R_3(A)$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0 \Rightarrow R_3(A) \geq 2$

selecciona-ho amb F_2 i C_3 $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 + 3F_3 \\ F_2 - F_3}} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$

Penseu

$\begin{array}{l} C_1 \\ = 1 \end{array} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_3(A) \geq 3$
 $= 16 - 32 = -16$ $A \text{ } 4 \times 3 \Rightarrow R_3(A) \leq 3$ $\left. \begin{array}{l} R_3(A) \geq 3 \\ R_3(A) \leq 3 \end{array} \right\} \underline{\underline{R_3(A) = 3}}$

ara per calcular $R_3(A_{\text{red}})$ selecciona el Δ_3 amb la
columna 1 i F_4 però això ja ho hem calculat.
en $|A_{\text{red}}| = 0 \Rightarrow R_3(A_{\text{red}}) = 3 \Rightarrow \text{S.C.D.}$
3 INC

I la solució per cràner és



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-16} \stackrel{\substack{F2-F1 \\ F3-F1}}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{16}{-16} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-16} \stackrel{\substack{F1-F2 \\ F3-F2}}{=} \frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{16}{-16} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-16} \stackrel{\substack{F1-F3 \\ F2-F3}}{=} \frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{16}{-16} = -1$$

$$S.C.D \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

2) Troba X de manera que $A X - 2 B = C$

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant determinants.

(2,5 punts)

②

$$A X - 2 B = C$$

$$A X = C + 2 B$$

$$\text{Si } \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}(A X) = A^{-1}(C + 2 B) \quad \leftarrow C=0$$

$$I X = A^{-1}(2 B)$$

$$\boxed{X = A^{-1} 2 B}$$

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \text{ i com } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Descom C1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(\text{adj}(A))^T}{|A|} =$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

✍

$$X = A^{-1} \cdot 2 B = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = - \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

3) Donades les equacions:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

- Com és aquest sistema? (SCD, SCI o SI)
- Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui incompatible.
- Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui compatible determinat.

Justifica en cada cas el procediment que has fet servir.

(0,5 punts)

3

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Com $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} R_2(A) = 2 \\ R_3(A_{PI}) = 2 \\ \text{INC} = 3 \end{cases}$

S.C.I. amb 1
grau de llibertat
per expressar la
z lliure.

b) Copio la PI convertint el Tercer IND.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \text{S.I.}$$

c) Necessito cal que doni un valor concret a la
INCÒGNITA LLIURE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{tenim poder assignar qualsevol valor a z que } |A| \neq 0$$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

4) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

- a) Si A és una matriu de $\text{Rang}(A)=3$ tots els seus menors d'ordre 2 són diferents de zero.
- b) Si Ampl és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals i el $\text{Rang}(\text{Ampl})$ és menor que el número d'incògnites el sistema és incompatible.

(0,5 punts)

4) a) Fals per exemple

CONTRAEXEMPLE

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Rg}(A)=3$
però.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$F_4 = 2F_1$

b) Fals

CONTRAEXEMPLE

$(1 \ 1 \ 1 \ | \ 1)$

$\text{Rg}(\text{Ampl})=1$
 $\text{Rg}(A)=1$
amb 2 graus de llib.

S.C.I



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

5) Calculeu el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

(1 punt)

$$\textcircled{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \\ = \\ F_5 + F_1 \\ F_6 + F_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} =$$

Com en
TRIANGULAR
NO'ES CAL
MULTIPLICAR
LA DIAGONAL
PRINCIPAL

$$= 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 23040$$