Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) En una botiga, un client s'ha gastat 150 € en la compra de 12 articles, entre discos, llibres i carpetes. Cada disc li ha costat 20 €, cada llibre 15 €, i cada carpeta 5 €. Se sap que entre discos i carpetes hi ha el triple que de llibres.

   a) Formuleu el sistema d'equacions associat a l'enunciat anterior.

   b) Solucioneu el sistema anterior pel mètode de Gauss i determineu quants articles ha comprat de cada tipus.

(1,5 punts)

a) Si anomenem x el nombre de discs, y el nombre de llibres i z el nombre de carpetes, tenim que

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 20x+15y+5z=150 \\ x+z=3y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 4x+3y+z=30 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolem el sistema aplicant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 4 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a-4\cdot 1a \\ 3a-1a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a\cdot(-1) \\ \frac{-1}{4}\cdot 3a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ y+3z=18 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=3 \\ z=\frac{18-y}{3}=\frac{18-3}{3}=5 \\ x=12-y-z=12-3-5=4 \end{array}$$

Solució: Per tant, ha comprat 4 discos, 3 llibres i 5 carpetes.

2) Utilitzant determinants discutiu el sistema següent, segons els valors del paràmetre ***a***. Resoleu-lo en els casos de compatibilitat:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x+ay+4z=2} \\ \mathbf{ax+2y+6z=0} \\ \mathbf{4x+2ay+10z=a} \end{array}\right\}$$

(0,2 de |A|+ 1,8 de discussió + 1,5 Solució SCD+ 1,5 solució SCI =5 punts)

- Estudiem el rang de la matriu dels coeficients. Mirem |A|:
-

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix}=-2a^2+8=0 \rightarrow a=\pm 2$$

- Si $a\neq 2$ i $a\neq -2$ $\rightarrow$ Rang (A)= 3 ==> Rang (A')=3 i com hi ha 3 incògnites queda que el sistema és compatible determinat (SCD)

SI calculeu la solució per exemple per cramer i simplifiqueu queda que la solució és:

$$X=\frac{-3a+10}{a+2};\quad Y=\frac{-2a+12}{a+2};\quad Z=\frac{1}{2}a-2$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right)$$

Observem que la 3a equació és la suma de les dues anteriors

i que $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

Per tant, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *nombre d'incògnites*. El sistema seria compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. En aquest cas per exemple agafem com a paràmetre la x i les solucions queden així

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + 4z = 2 \\ 2z + 2y + 6z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 \end{array}$$

- Si $a = -2$, quedaria:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array}\right)$$

En aquest cas, com que $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -20 \neq 0, \quad ran\left(A\right) = 2.$

A més, $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 128 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ \left(A'\right) = 3$

Com que $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$, el sistema seria incompatible (S.I.).

3) Troba el valor del determinant següent:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

(1 punt)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILES} \\ 1a \\ 2a \\ 3a+1a \\ 4a+2\cdot 1a \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

(1) Desenvolupem per la 2a columna.

4) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \; i \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trobeu la matriu X tal que A·X·B = C+D

(2 punts)

Existeixen les inverses de A i B ja que |A|=1 i |B|=2 no són zero.
Així doncs podem aïllar la X. Queda $X = A^{-1} \cdot (C + D) \cdot B^{-1}$ i fent els càlculs:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C + D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (C + D) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Enuncieu i demostreu 2 propietats dels determinants.

(0,2 enunciats + 0,3 demostracions = 0,5 punts)

Teoria feta a classe.