Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Àlgebra

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) En una reunió hi ha 60 persones entre altes, mitjanes i baixes. Se sap que entre les baixes i les mitjanes dupliquen el nombre d'altes. També se sap que les altes i el doble de les mitjanes són el doble de les baixes. Quin és el nombre de persones altes, mitjanes i baixes?.
   a) Formuleu el sistema d'equacions associat a l'enunciat anterior.
   b) Solucioneu el sistema anterior pel mètode de Gauss i determineu quantes persones hi ha de cada tipusarticles ha comprat de cada tipus.

(0,5 plantejament + 1 solució = 1,5 punts)

Si anomenem x el nombre de persones altes, y el nombre de persones mitjanes i z el nombre de persones baixes, tenim que:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ y+z=2x \\ x+2y=2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 2x-y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Ho resolem aplicant la regla de Cramer o per Gauss. A l'examen es demana que es faci per Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{240}{12} = 20; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{180}{12} = 15; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{300}{12} = 25$$

Per tant, hi ha 20 persones altes, 15 de mitjanes i 25 de baixes.

2) Utilitzant determinants discutiu el sistema següent, segons els valors dels paràmetres ***a*** i ***b***. I resoleu-lo en els casos de compatibilitat:

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z=b \\ 2x+ay-z=2 \\ -x+ay+2z=2 \end{array}\right\}$$

(0,2 |A| +3·0,6 Discussió: + 1,5 SCD + 1,5 SCI = 5 punts)

Estudiem el rang de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9a = 0 \quad \to \quad a = 0$$

- Si $a \neq 0 \to$ El sistema és compatible determinat, qualsevol que sigui el valor de *b.*

Cal solucionar-lo i queda:

$$x = \frac{3b+6}{9}; y = \frac{-b+4}{3a}; z = \frac{2+b}{3}$$

- Si $a = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3b - 12 = 0 \quad \to \quad b = 4$$

- Si $a = 0$ y $b = 4$ $\rightarrow$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

  El sistema seria compatible indeterminat SCI amb un grau de llibertat.
  Cal solucionar-lo i queda $x = 2, y = y, z = 2 \quad \forall y \in R$

- Si $a = 0$ i $b \neq 4$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema seria incompatible.

3) Troba el valor del determinant següent:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

(1punt)

FILES

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1a + 2 \cdot 4a \\ 2a \\ 3a - 4a \\ 4a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 9 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

(1) Desenvolupem per la 1a columna.

4) Expressa i resol el sistema següent en forma de matriu:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} &= \mathbf{-3} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} &= \mathbf{2} \end{aligned}\right\}$$

Expressem el sistema en forma de matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Per resoldre'l, multipliquem per l'esquerra per A^{-1}:

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprovem que $|A| = 2 \neq 0$ i obtenim A^{-1}:

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj\ (A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ (A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Obtenim X:

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant la solució del sistema és:

$x = 0, \ y = -1, \ z = 1$

(0,25 matrius + 0,5 aïllar la X + 0,5 punts A^{-1} + 0,25 operació = 1,5 punts)

5) Enuncieu i demostreu la regla de Cramer que permet solucionar els Sistemes Compatibles Determinats (SCD).

(0,5 enunciat + 0,5 demostració = 1 punt)

Teoria feta a classe.