Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a+2 \\ 2x & + & (a+1)y & + & (a+1)z & = & -a \end{array}\right\}$$

(6 punts)

2) Donades les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} i\ D=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i sabent que existeix la matriu inversa de A i que és $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Trobeu la matriu X tal que A · X = (B+C) ·D

(1,5 punts)

3) Calculeu el determinant següent: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(1,5 punts)

4) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

a) Donades dues matrius A i B tal que el rang(A)=rang (B), aleshores A=B.

b) Un sistema de 3 equacions lineals i 4 incògnites pot ser compatible determinat.

c) Un sistema de 4 equacions lineals i 3 incògnites pot ser compatible determinat.

d) Un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser mai compatible.

(1 punt)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a+2 \\ 2x & + & (a+1)y & + & (a+1)z & = & -a \end{array}\right\}$$

(6 punts)

Anem a resoldre el sistema pel mètode de Gauss
Fem un canvi de files F2 -->F1 i les transformacions de Gauss següents:
F3–2 F2 ---> F3
F1–a F2----> F2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a+2 \\ 2 & a+1 & a+1 & -a \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a^2-a \\ 0 & a-1 & -a+1 & -3a-4 \end{array}\right) \equiv \text{F3+F2}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a^2-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & -a^2-4a-4 \end{array}\right)$$

Així hem doncs en els casos en els que $-a^2-a+2 \neq 0 \quad i \quad a-1 \neq 0$ el sistema és SCD anem a estudiar quins són els valors de a que fan que això sigui zero:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$-a^2-a+2=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} =-2 \\ =1 \end{cases}$$

Així doncs el sistema es redueix a tres casos:

Cas I) a ≠ 1 i a ≠ –2
on resulta que Rang(A)=3, Rang (Ampl)=3, Núm. incògnites =3 ⇒ **SCD** i la solució és:

F3 $\Rightarrow z=\dfrac{-(a+2)^2}{-(a+2)(a-1)}=\dfrac{a+2}{a-1}$

F2 ⇒

$$(1-a)Y+(1+a)(1-a)Z=-a^2-a$$

$$Y=\frac{-a^2-a-(1+a)(-1)\cancel{(a-1)}\dfrac{a+2}{\cancel{(a-1)}}}{1-a}=\frac{\cancel{-a^2}-a+\cancel{a^2}+3a+2}{1-a}=\frac{2(a+1)}{1-a}$$

F1 ⇒

$X = a + 2 - aZ - Y = a + 2 - a\dfrac{a+2}{a-1} - \dfrac{2a+2}{-(a-1)} =$

$= \dfrac{(a+2)(a-1) - a^2 - 2a + 2a + 2}{a-1} = \dfrac{\cancel{a^2} + a - 2 - \cancel{a^2} - \cancel{2a} + \cancel{2a} + 2}{a-1} = \dfrac{a}{a-1}$

Cas II) a=1 el sistema queda així:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$ i a la vista de les dues últimes equacions és clar que és S.I.

Cas III) a=–2 el sistema queda així:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Rang (A)=2 i Rang (Ampl)=2 $\Rightarrow$ S. C.

i com a més hi ha 3 incògnites resulta que és un SCI amb 1 grau de llibertat.
Podem agafar per exemple com a variable lliure (o paràmetre) la de la 3a columna, així doncs tenim que si $z = l \quad \forall l \in R$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2l \\ 0 & 3 & -2+3l \end{array}\right)$ I solucionant els sistema tenim

$$\left.\begin{array}{l} z = l \\ y = \dfrac{-2+3l}{3} \\ x = 2l - y = 2l - \dfrac{-2+3l}{3} = \dfrac{6l + 2 - 3l}{3} = \dfrac{3l + 2}{3} \end{array}\right\} \forall l \in R$$

2) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} i\ D = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i sabent que existeix la matriu inversa de A i que és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Trobeu la matriu X tal que A · X = (B+C) ·D

(1,5 punts)

Com sabem que existeix inversa de A només cal que multipliquem per aquesta inversa per l'esquerra en els dos membres de l'equació i tenim que:
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B+C) \cdot D$
$X = A^{-1} \cdot (B+C) \cdot D$ i fent els càlculs amb les matrius tenim que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3) Calculeu el determinant següent: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F3+F2 \\ = \\ F5+F2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} desenvolupant \\ = \quad per C3 \end{matrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C1-3C2 \\ = \\ C4-C2 \end{matrix} -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

Ara desenvolupant per la F3 tenim determinant (A) = $-a_{3,2} \cdot A_{3,2} = +a_{3,2} \cdot M_{3,2} =$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} F1-3F2 \\ = \\ F3+F2 \end{matrix} \begin{vmatrix} -8 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} =$$

= 8 (–12 +10) = –16

(1,5 punts)

4) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

a) Donades dues matrius A i B tal que el rang(A)=rang (B), aleshores A=B.

Fals. Exemple $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ és clar que les matrius estan escalonades per files per tant Rang (A)=2=Rang(B) i en canvi A $\neq$ B

b) Un sistema de 3 equacions lineals i 4 incògnites pot ser compatible determinat.

No, ja que rang (A) com a màxim és 3 i com hi ha 4 incògnites mai pot ser SCD, ja que cal per a que sigui SCD cal que
Rang(A)= Rang(Ampliada)=núm. incògnites

c) Un sistema de 4 equacions lineals i 3 incògnites pot ser compatible determinat.

Sí només cal un sistema amb Rang(A)= Rang(Ampliada)=núm. incògnites=3 com per exemple:
X=1
Y=2
Z=3
X+Y+Z=6

d) Un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser mai compatible.

Fals. Per exemple X+Y=1 és un Sistema de 1 equació i dues incògnites que és Sistema Compatible Indeterminat (SCI) amb 1 grau de llibertat.

I les solucions poden expressar-se així: $\left.\begin{array}{l} x=1-l \\ y=l \end{array}\right\} \forall l \in R$

(1 punt)