Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Àlgebra i vectors

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions seguent. **ATENCIÓ: cal fer-ho utilitzant determinants, la regla de Cràmer i cal donar les solucions simplificades al màxim:**

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & & & - & mz & = & m \\ 4x & - & (2+m)y & - & 6z & = & 10+m \\ 2x & - & my & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

(4,5 punts)

2) Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} m+1 & -1 & m+1 \\ -2 & m & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

a) Per a quins valors de m és inversible?

b) Calculeu la seva inversa per m = –1

(1,5 punts)

3) Donats els vectors $\vec{u}$=(1,–1,4), $\vec{v}$=(2,1,3) i $\vec{w}$=(1,0,0).

a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents

b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de a i b per tal que el vector (a,1,b) sigui combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

(1 punt)

4) Donat els vectors $\vec{u}$=(2,1,–2), $\vec{v}$=(0,3,4) en un base ortonormal.

a) Calculeu l'angle que formen els dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

b) Calculeu la projeccció ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$

(0,5+1,5=2 punts)

5) Donats els vectors $\vec{u}$=(a,2,6), $\vec{v}$=(1,1,b) calculeu els valors de a i b per tal que siguin Linealment Dependents

(0,5 punts)

6) Digueu quins dels següents conjunts de vector són base del vectors lliures de l'espai V_3. Cal que justifiqueu les respostes.

A={(1,2,0), (0,1,1),(2,5,1)}
B={(1,2,0), (0,1,1),(0,3,2)}
C={(1,2,3), (4,5,6),(7,8,9),(0,1,2)}
D={(0,1,1),(0,0,1)}

(0,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions seguent. ATENCIÓ: cal fer-ho utilitzant determinants, la regla de Cràmer i cal donar les solucions simplificades al màxim:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & & & - & mz & = & m \\ 4x & - & (2+m)y & - & 6z & = & 10+m \\ 2x & - & my & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

(4,5 punts)

Com la matriu del sistema és quadrada calculem primer el determinant de la matriu del sistema:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -m \\ 4 & -2-m & -6 \\ 2 & -m & 0 \end{vmatrix} = 4m^2 - 2(m+2)m + 6m = 4m^2 - 2m^2 - 4m + 6m =$$

$$= 2m^2 + 2m = 2m(m+1)$$

per tant det(A)=0 $\Leftrightarrow m = 0 \ o \ \ m = -1$. Així doncs tenim tres casos:

CAS-I) $m \neq 0, -1$ **resulta que rang (A)=rang(Ampl)=núm incògnites= 3** $\Rightarrow$ **SCD** i la solució si la calculem per Cràmer és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & -m \\ 10+m & -2-m & -6 \\ 0 & -m & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{m}\begin{vmatrix} m & -m \\ 10+m & -6 \end{vmatrix}}{2\cancel{m}(m+1)} = \frac{-6m + 10m + m^2}{2(m+1)} = \frac{m(m+4)}{2(m+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -m \\ 4 & 10+m & -6 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{2}\begin{vmatrix} m & -m \\ 10+m & -6 \end{vmatrix}}{\cancel{2}m(m+1)} = \frac{-6m + 10m + m^2}{m(m+1)} = \frac{\cancel{m}(m+4)}{\cancel{m}(m+1)} = \frac{(m+4)}{(m+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & m \\ 4 & -2-m & 10+m \\ 2 & -m & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4m^2 + 4m + 2m^2 - 10m - m^2}{2m(m+1)} = \frac{-3m^2 - 6m}{2m(m+1)} = \frac{-3\cancel{m}(m+2)}{2\cancel{m}(m+1)} =$$

$$= \frac{-3(m+2)}{2(m+1)}$$

CAS II) m = –1

Aleshores sabem que el Rang (A)<3. El sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Mirant el menor d'ordre dos format per F1, F2, C1 i C2 tenim que

$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Rang (A) ≥ 2 i com ja sabem que Rang (A)<3 $\Rightarrow$ Rang A= 2

Ara per calcular el Ran (Ampl) orlem aquest M_2 amb la F3 i la columna de termes independents:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 -2 +9 \neq 0 \Rightarrow$ Rang (Ampl)=3.

Així doncs com Ran (A) $\neq$ Rang (Ampl) $\Rightarrow$ S.I.

CAS III) m = 0

Aleshores sabem que el Rang (A)<3. El sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Mirant el menor d'ordre dos format per F1, F2, C1 i C2 tenim que

$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Rang (A) ≥ 2 i com ja sabem que Rang (A)<3 $\Rightarrow$ Rang A= 2

Ara per calcular el Ran (Ampl) orlem aquest M_2 amb la F3 i la columna de termes independents:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 10 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ i com no hi ha cap altres orlat de M_2 $\Rightarrow$ Rang (Ampl)=2.

Així doncs com Ran (A)= Rang (Ampl)=2 i el núm d'incògnites=3 $\Rightarrow$ S.C.I. amb un grau de llibertat.

Com tenim el M_2=2 $\neq$ 0 podem eliminar la F3 i agafar com a paràmetre la 3a incògnita z.
Així doncs el sistema és:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 10+6z \end{array}\right)$$ **i les seves solucions són:**

z= l $\qquad \forall l \in R$

x=0

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 10+6l \end{vmatrix}}{2} = \frac{-\cancel{2}(5+3l)}{\cancel{2}} = -5-3l$$

2) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} m+1 & -1 & m+1 \\ -2 & m & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

a) Per a quins valors de m és inversible?

La matriu A és inversible per als valors del paràmetre m que fan que det(A) $\neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m+1 & -1 & m+1 \\ -2 & m & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{C3-C1}{=} \begin{vmatrix} m+1 & -1 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} m+1 & -1 \\ -2 & m \end{vmatrix} = (m^2+m-2)$$

així doncs det(A)=0 $\Leftrightarrow m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =1 \\ =-2 \end{array} \right.$

Per tant la matriu A és inversible si m $\neq$ 1 i –2

(0,5 punts)

b) Calculeu la seva inversa per m = –1

Si m= –1 aleshores $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, i per la inversa és $A^{-1} = \dfrac{(adjunta(A))^T}{|A|}$

fent els càlculs tenim que

$|A| = -2$

$$adjunt(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \; i \; (adjunt(A))^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

i finalment la inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 punt)

3) Donats els vectors $\vec{u}$ =(1,–1,4), $\vec{v}$ =(2,1,3) i $\vec{w}$ =(1,0,0).

a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents

Només cal estudiar el rang de la matriu que té els 3 vectors com a columnes. Per fer-ho calculem el seu determinant

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow$ per tant els 3 vectors són linealment independents.

b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de a i b per tal que el vector (a,1,b) sigui combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i.

Els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ no són proporcionals $\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\right) \Rightarrow$ són L.I. Així doncs només cal que el rang de la matriu que té els 3 vectors com a columnes sigui 2.
Per fer-ho només cal que imposem que el seu determinant valgui zero

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - b = 0 \Rightarrow$$ per tant cal que b=3 i a pot tenir qualsevol valor.

(0,5·2=1 punt)

4) Donat els vectors $\vec{u}$=(2,1,–2), $\vec{v}$=(0,3,4) en un base ortonormal.

a) Calculeu l'angle que formen els dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{3-8}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+16}} = \frac{-5}{3\cdot 5} = \frac{-1}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) = 109,47^{\circ}$$

b) Calculeu la projeccció ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$

Anomem $\vec{w}$ al vector resultant tenim que

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{0+3-8}{\sqrt{9+16}}\overrightarrow{(0,3,4)} = \frac{-5}{5}\frac{\overrightarrow{(0,3,4)}}{5} = \frac{-1}{5}\overrightarrow{(0,3,4)} = \overrightarrow{\left(0,-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$$

$$o\ \vec{w} = |\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

(0,5+1,5=2 punts)

5) Donats els vectors $\vec{u}$=(a,2,6), $\vec{v}$=(1,1,b) calculeu els valors de a i b per tal que siguin Linealment Dependents

Només cal imposar que són proporcionals $\frac{a}{1} = \frac{2}{1} = \frac{6}{b} \Rightarrow$ a=2 i b=3

6) Digueu quins dels següents conjunts de vector són base del vectors lliures de l'espai V_3 . Cal que justifiqueu les respostes.

A={(1,2,0), (0,1,1),(1,3,2)}
B={(1,2,0), (0,1,1),(0,3,2)}
C={(1,2,3), (4,5,6),(7,8,9),(0,1,2)}
D={(0,1,1),(0,0,1)}

C no ja que són 4 vectors i 4 vectors de V_3 són L.D.

D no ja que són només 2 vectors i 2 vectors de V_3 no poden generat V_3

Els altres dos casos tenen 3 vectors, per tant només cal mirar si són L.I. o no. per fer-ho calculem el determinant de la matriu formada pels 3 vectors.

A: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+4-0-0-5=0 \Rightarrow$ són L.D. i per tant **NO** són base de V_3

B: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-3=-1 \neq 0 \Rightarrow$ són L.I. i per tant **SÍ** són base de V_3