Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} kx & & & + & 2z & = & 0 \\ & + & ky & - & z & = & k \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

(6 punts)

2) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 30 & 2 \end{pmatrix} \; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Trobeu la matriu X tal que $A \cdot X \cdot B = C + D$

(3 punts)

3) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

a) Donades dues matrius A i B tal que el rang(A)=rang (B), aleshores A i B han de ser de la mateixa dimensió B.

b) Un sistema de 3 equacions lineals i 2 incògnites pot ser incompatible.

c) Un sistema de 3 equacions lineals i 2 incògnites pot ser compatible determinat.

d) Un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser mai compatible.

(1 punt)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{ccccccc} kx & & & + & 2z & = & 0 \\ & + & ky & - & z & = & k \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

(6 punts)

Anem a resoldre el sistema pel mètode de Gauss
Passo la columna 3a a la 1a posició C3 -->C1 i també fem una permutació de files F3 <-->F1. **Ara les incògnites estan en l'ordre (z, x, y)**

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k & k \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & k & k \\ 2 & k & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ara fem les transformacions de Gauss següents:
F2 + F1 ---> F2
F3 – 2 F1 ---> F3

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & k+3 & k+5 \\ 0 & k-2 & -6 & -10 \end{array}\right) \equiv$$

Ara
F3 – (k-2) F2 --> F3

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & k+3 & k+5 \\ 0 & 0 & -k^2-k & -k^2-3k \end{array}\right) \equiv$$

Així hem doncs en els casos en els que $-k^2-k\neq 0 \iff -k(k+1)\neq 0 \iff k\neq 0,-1$ el sistema és SCD

Així doncs el sistema es redueix a tres casos:

Cas I) $K\neq 0$ i $k\neq -1$
on resulta que Rang(A)=3, Rang (Ampl)=3, Núm. incògnites =3 $\Rightarrow$ **SCD** i la solució és:

F3 $\Rightarrow y=\dfrac{-k^2-3k}{-k^2-k}=\dfrac{-k(k+3)}{-k(k+1)}=\dfrac{(k+3)}{(k+1)}$

F2 $\Rightarrow$

$$X+(k+3)Y=k+5$$

$$X=k+5-(k+3)Y=k+5-(k+3)\frac{k+3}{k+1}=\frac{(k+5)(k+1)-(k+3)^2}{k+1}=\frac{-4}{k+1}$$

F1 $\Rightarrow$

$$z=5-X-3Y=5-\frac{-4}{k+1}-3\frac{k+3}{k+1}=\frac{5k+5+4-3k-9}{k+1}=\frac{2k}{k+1}$$

per tant és Sistema Compatible Determinat (SCD) i la solució única és

$$X=\frac{-4}{k+1};Y=\frac{k+3}{k+1}\ i\ z=\frac{2k}{k+1}$$

Cas II) K = –1 el sistema queda així:

$\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$ i a la vista de la última equació és clar que és un **sistema incompatible (S.I.)**

Cas III) K=0 el sistema queda així:

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Rang (A)=2 i Rang (Ampl)=2 $\Rightarrow$ S. C.

i com a més hi ha 3 incògnites (z,x,y) resulta que és **un SCI amb 1 grau de llibertat**.
Podem agafar per exemple com a variable lliure (o paràmetre) la de la 3a columna, així doncs tenim que si $y = l \quad \forall l \in R$

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 5-3l\\ 0 & 1 & 5-3l\end{array}\right)$ I solucionant els sistema i recordant que l'ordre de les incògnites és (z,x) tenim que **les solucions són**

$$\left.\begin{array}{l}y = l\\ x = 5-3l\\ z = 5-3l-(5-3l)=0\end{array}\right\}\forall l \in R \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 5-3l\\ y = l\\ z = 5-3l-(5-3l)=0\end{array}\right\}\forall l \in R$$

2) Donades les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 30 & 2\end{pmatrix} D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 12\end{pmatrix}$$

Trobeu la matriu X tal que A · X ·B = C+ D

(3 punts)

Si existeixen les inverses de A i B podem aïllar la matriu X.
Només cal que multipliquem A^{-1} per l'esquerra en els dos membres de l'equació i multipliquem per B^{-1} en els dos membres de l'equació. Així doncs tenim que:
$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (C+D) \cdot B^{-1}$
$X = A^{-1} \cdot (C+D) \cdot B^{-1}$ i fent els càlculs amb les matrius tenim que

Primer calculem si existeixen les inverses de A i de B.
Inversa de A

$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\equiv}{=}^{F2-3F1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\underset{\equiv}{}^{F1-F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)=$$
$$=(I\,|\,A^{-1})$$

Així doncs existeix A^{-1} i és $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

Inversa de B

$$(B\,|\,I)=\left(\begin{array}{cc|cc}4 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\equiv}{=\tfrac{1}{4}F1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/2 & 1/4 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\equiv}{F1+F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/2 & 1/4 & 0\\ 0 & -1/2 & 1/4 & 1\end{array}\right)\equiv$$

$$\underset{\equiv}{F1-F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1/2 & 1/4 & 1\end{array}\right)\underset{\equiv}{F2(-2)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1/2 & -2\end{array}\right)$$

$$=(I\,|\,B^{-1})$$

Així doncs existeix B^{-1} i és $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1/2 & -2\end{pmatrix}$

I ara ja només cal operar

$X = A^{-1} \cdot (C+D) \cdot B^{-1} =$

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 4\\ 22 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1/2 & -2\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1/2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ -1 & -8\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -14\\ -7 & -50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ -1 & -8\end{pmatrix}\end{cases}$$

$X=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ -1 & -8\end{pmatrix}$

3) Raoneu la certesa o falsedat de les afirmacions següents:

e) Donades dues matrius A i B tal que el rang(A)=rang (B), aleshores A i B han de ser de la mateixa dimensió B.

Fals. Exemple $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ és clar que les matrius estan escalonades per files per tant Rang (A)=2=Rang(B) i en canvi A és de 2x2 i B de 3x3

f) Un sistema de 3 equacions lineals i 2 incògnites pot ser incompatible.

Sí per exemple

X+Y=1

X+Y=2

X=0

g) Un sistema de 3 equacions lineals i 2 incògnites pot ser compatible determinat.

Sí només cal un sistema amb Rang(A)= Rang(Ampliada)=núm. incògnites=2 com per exemple:

X=1
Y=2
X+Y=3

h) Un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser mai compatible.

Fals. Per exemple X+Y=1 és un Sistema de 1 equació i dues incògnites que és Sistema Compatible Indeterminat (SCI) amb 1 grau de llibertat.

I les solucions poden expressar-se així: $\left.\begin{array}{l} x = 1 - l \\ y = l \end{array}\right\} \forall l \in R$

(1 punt)