Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) **Utilitzant determinants** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & k \\ kx & + & 2y & - & z & = & 3k \\ 2x & + & ky & - & 2z & = & 6 \end{array}\right\}$$

(6 punts)

2) Troba X de manera que 3 A X = B,

si A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant determinants.

(3 punts)

3) En un sistema homogeni de 3 equacions i 2 incògnites, la matriu de coeficients té rang 2. Com és el sistema? I cas de ser compatible, pots dir quantes i quines són les solucions del sistema? Raona la teva resposta.

(1 punt)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) **Utilitzant determinants** discutiu i resoleu en els casos de compatibilitat el sistema d'equacions (cal donar les solucions simplificades al màxim):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & k \\ kx & + & 2y & - & z & = & 3k \\ 2x & + & ky & - & 2z & = & 6 \end{array}\right\}$$

(6 punts)

Primer de tot calcularem el determinant de la matriu A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \end{vmatrix} \underset{C2+C3}{\overset{C1-C3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 1 & -1 \\ 4 & k-2 & -2 \end{vmatrix} \overset{Desen F1}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} k+1 & -1 \\ 4 & k-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (k+1)(k-2) - 4 = k^2 + k - 2k - 2 - 4 = k^2 - k - 6 = (k+2)(k-3)$$

Així doncs tenim tres casos

I) k $\neq -2, 3$
II) K= –2
III) K= 3

Anem a discutir-los i solucionar-los, cas de ser possible, de forma individual:

I) k $\neq -2, 3$

Com el |A| $\neq$ 0 sabem que el Rang(A)=3,
Rang(Ampl) $\geq$ Rang(A)=3 i com Ampl té només 3 files $\Rightarrow$ Rang(Ampl)=3

així doncs és Sistema Compatible (SC) i com el número d'incògnites també és 3 $\Rightarrow$ és SCD i la solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 3k & 2 & -1 \\ 6 & k & -2 \end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)} \underset{F3+2F1}{\overset{F2+F1}{=}} \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 4k & 1 & 0 \\ 6+2k & k-2 & 0 \end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)} \overset{Desen C3}{=} \frac{1 \begin{vmatrix} 4k & 1 \\ 6+2k & k-2 \end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)} =$$

$$= \frac{4k(k-2) - (6+2k)}{(k+2)(k-3)} = \frac{4k^2 - 8k - 6 - 2k}{(k+2)(k-3)} = \frac{4k^2 - 10k - 6}{(k+2)(k-3)} = \frac{4\cancel{(k-3)}(k+1/2)}{(k+2)\cancel{(k-3)}} = \frac{4k+2}{(k+2)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ k & 3k & -1\\ 2 & 6 & -2\end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)} \underset{F3+2F1}{\overset{F2+F1}{=}} \frac{\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ k+1 & 4k & 0\\ 4 & 6+2k & 0\end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)} \overset{Desen per C3}{=} \frac{1\begin{vmatrix}k+1 & 4k\\ 4 & 6+2k\end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(6+2k)-16k}{(k+2)(k-3)}=\frac{6k+6+2k^2+2k-16k}{(k+2)(k-3)}=\frac{2k^2-8k+6}{(k+2)(k-3)}=\frac{2(k-1)\cancel{(k-3)}}{(k+2)\cancel{(k-3)}}=\frac{2(k-1)}{(k+2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & k\\ k & 2 & 3k\\ 2 & k & 6\end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)} \underset{F3-2F1}{\overset{F2+2F1}{=}} \frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & k\\ k+2 & 0 & 5k\\ 0 & k+2 & 6-2k\end{vmatrix}}{(k+2)(k-3)}=\frac{k(k+2)^2-5k(k+2)+1(k+2)(6-2k)}{(k+2)(k-3)}=$$

$$=\frac{k^3+4k^2+4k-5k^2-10k+6k+12-2k^2-4k}{(k+2)(k-3)}=\frac{k^3-3k^2-4k+12}{(k+2)(k-3)}=\frac{(k-2)\cancel{(k+2)}\cancel{(k-3)}}{\cancel{(k+2)}\cancel{(k-3)}}=k-2$$

Així doncs la solució del SCD és :

$$x=\frac{2(k+1)}{(k+2)};\ y=\frac{2(k-1)}{(k+2)};\ z=k-2$$

II) K= –2

El sistema és aquest

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & -2\\ -2x & + & 2y & - & z & = & -6\\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 6\end{array}\right\}$$

- Rang(A)

com tenim que $M_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow$ Rang(A) ≥ 2, però com |A|=0 ja sabem que és <3 així doncs Rang(A)=2

- Rang(Ampl)

Orlem el $M_2 \neq 0$ amb la Columna de termes independents i la F3

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -6\\ -2 & -2 & 6\end{vmatrix} \overset{F3+F2}{=} \begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -6\\ 0 & -3 & 0\end{vmatrix} \overset{Desen F3}{=} -(-3)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=3(6+4)=30\neq 0$$

$\Rightarrow$ Rang(Ampl)=3

així doncs com Rang(A) $\neq$ Rang(Ampl) $\Rightarrow$ Sistema Incompatible (SI)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

III) **K= 3.**

El sistema és aquest $\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 9 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 6 \end{array}\right\}$

- Rang(A)

com tenim que $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-2=-1\neq 0 \Rightarrow$ Rang(A) ≥ 2, però com |A|=0 ja sabem que és <3 així doncs Rang(A)=2

- Rang(Ampl)

Orlem el $M_2 \neq 0$ amb la Columna de termes independents i la F3

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} F2+F1 \\ = \\ F3+2F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} Desen F3 \\ = \end{matrix} -1\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rang(Ampl)=2}$$

Així doncs com Rang(A)=Rang(Ampli)=2 i número d'incògnites és 3 és un Sistema Compatible Indeterminat (SCI) amb 1 grau de llibertat.

Com $M_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ Eliminem la fina que no intervé en ell, que és la F3 i la columna que no intervé en ell és la que deixem lliure i la passem a l'altre membre com a paràmetre. Obtenint així el sistema següent:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3-x \\ 2 & -1 & 9-3x \end{array}\right) \end{array}$$

que considerat com a sistema de 2 equacions i 2 incògnites (y, z) és un sistema de cramer (SCD) i que per tant podem solucionar amb la regla de cramer:

$x = l \quad \forall l \in R$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3-l & 1 \\ 9-3l & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3+l-9+3l}{-1} = 12-4l = 4(3-l)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-l \\ 2 & 9-3l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9+3l-6+2l}{-1} = 15-5l = 5(3-l)$$

Algú ha agafat una altre $M_2 \neq 0$ i ha agafat com a paràmetre la incògnita z. Quedant així les solucions escrites així:

$$x = 3-\frac{m}{5}; \quad y = \frac{4m}{5}; \quad z = m \quad \forall m \in R$$

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

2) Troba X de manera que $3AX = B$,

si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Atenció: si has de calcular alguna matriu inversa ho has de fer utilitzant determinants.

(3 punts)

Com $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, així dons podem aïllar la X.

$$3AX = B \Rightarrow AX = \frac{1}{3}B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\frac{1}{3}B \Rightarrow IX = \frac{1}{3}A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{3}A^{-1}B$$

Ara anem a calcular la

$$A^{-1} = \frac{(adjuntar(A))^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Així doncs ara només cal operar:

$$X = \frac{1}{3}A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3) En un sistema homogeni de 3 equacions i 2 incògnites, la matriu de coeficients té rang 2. Com és el sistema? I cas de ser compatible, pots dir quantes i quines són les solucions del sistema? Raona la teva resposta.

Rang(A)=2
Rang(Ampl)$\geq$Rang(A)=2,
Però com el sistema és homogeni sabem que el Sistema és Compatible (SC) ja que té com a solució, com a mínim, la trivial (x=y=z=0).

Així doncs tenim que Rang(Ampl)=2; Rang(A)=2 ; Núm Incògnites=2 $\Rightarrow$ SCD i per tant la solució és única. Així doncs la única solució del sistema és la de totes les incògnites =0, és a dir X=0, Y=0 i Z=0

(1 punt)