Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{5/x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}+3x-1}{-5x} =$

(1,5+1=2,5 punts)

2) D'una funció y=f(x) de la qual sabem:

- Domini f = $R-\{0\}$ on és contínua i derivable
- Té simetria senar (és a dir, és simètrica respecte l'origen)
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0$
- f '(x)=0 només per $x = \pm\sqrt{2}$, i a més $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$ i $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$
- f ' (x)>0 $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ en els altres valors f ' (x)<0
- f '' (x)=0 només per $x = \pm 2\sqrt{3}$, i a més $f\left(-2\sqrt{3}\right) = -3{,}28$ i $f\left(2\sqrt{3}\right) = 3{,}28$
- f '' (x)>0 $\forall x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$ en els altres valors f '' (x)<0

Fes la taula resum per recollir tota aquesta informació i contesta

a) Té asímptotes? cas afirmatiu quines són?
b) Indica el seu creixement, decreixement, màxims i mínims locals
c) Estudia la seva curvatura
d) Dibuixa la gràfica de la funció.

(2 punts)

3) Trobeu les asímptotes de la funció $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

(2,5 punts)

4) Calculeu:

a) $\int \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x}} dx =$

b) $\int \dfrac{x\,dx}{\left(x^2+3\right)^5} =$

c) $\int \tan(4x) dx =$

d) $\int x \cdot e^{-3x^2+2009} dx =$

e) $\int \sin(5x) \cdot \cos(5x) dx =$

f) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-8x^6}} dx =$

(3 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{5/x} =$

És una indeterminació del tipus ∞^0. Aplicarem logaritme al límit per tal de convertir-la en una altra indeterminació que sigui possible transformar-la en alguna cosa on es pugui aplicar l'Hôpital.

L= $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{5/x} \Rightarrow \ln(L) = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^{5/x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^{5/x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\cdot\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

indeterminació a la qual li podem aplicar l'Hôpital

$$\ln(L) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\cdot\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+ \Rightarrow \ln(L) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}+3x-1}{-5x} =$

És una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$ i per tant podem aplicar l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+3x-1}{-5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}+3}{-5} = \frac{2\cdot e^0+3}{-5} = \frac{2+3}{-5} = -1$$

(1,5+1=2,5 punts)

2) D'una funció y=f(x) de la qual sabem:

- Domini f = $R-\{0\}$ on és contínua i derivable
- Té simetria senar (és a dir, és simètrica respecte l'origen)
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0$
- f '(x)=0 només per $x=\pm\sqrt{2}$, i a més $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$ i $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$
- f ' (x)>0 $\forall x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$ en els altres valors f ' (x)<0
- f '' (x)=0 només per $x=\pm 2\sqrt{3}$, i a més $f\left(-2\sqrt{3}\right) = -3{,}28$ i $f\left(2\sqrt{3}\right) = 3{,}28$
- f '' (x)>0 $\forall x \in (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (0,2\sqrt{3})$ en els altres valors f '' (x)<0

Fes la taula resum per recollir tota aquesta informació i contesta

x		$-2\sqrt{3}$ **=–3,5** **PI**		**–**$\sqrt{2}$ **Màx**		**0**		$\sqrt{2}$ **Mím**		$2\sqrt{3}$**=** **=3,5** **PI**	
f (x)	↗↗	**-3,28**	↗↗	**–**$\sqrt{2}$	↘↘↘↘	$\nexists$	↘↘↘↘	$\sqrt{2}$	↗↗	**3,28**	↗↗
f ' (x)	**+ + + + + +**			**0**	**– – – –**	$\nexists$	**– – – –**	**0**	**+ + + + + +**		
f '' (x)	**+ + +**	**0**	**– – – – – – –**			$\nexists$	**+++++++++++**			**0**	**– – –**

a) Té asímptotes? cas afirmatiu quines són?

Sí x=0 és una asímptota vertical i la gràfica de la funció per l'esquerra va cap a $-\infty$ i per la dreta cap a $+\infty$

A més la recta Y=X és una asímptota inclinada tant per $x \to +\infty$ com per $x \to -\infty$

b) Indica el seu creixement, decreixement, màxims i mínims locals

Creix $\forall x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$

Decreix $\forall x \in (-\sqrt{2},0) \cup (0,\sqrt{2})$

Té un màxim local en $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ i un mínim local en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

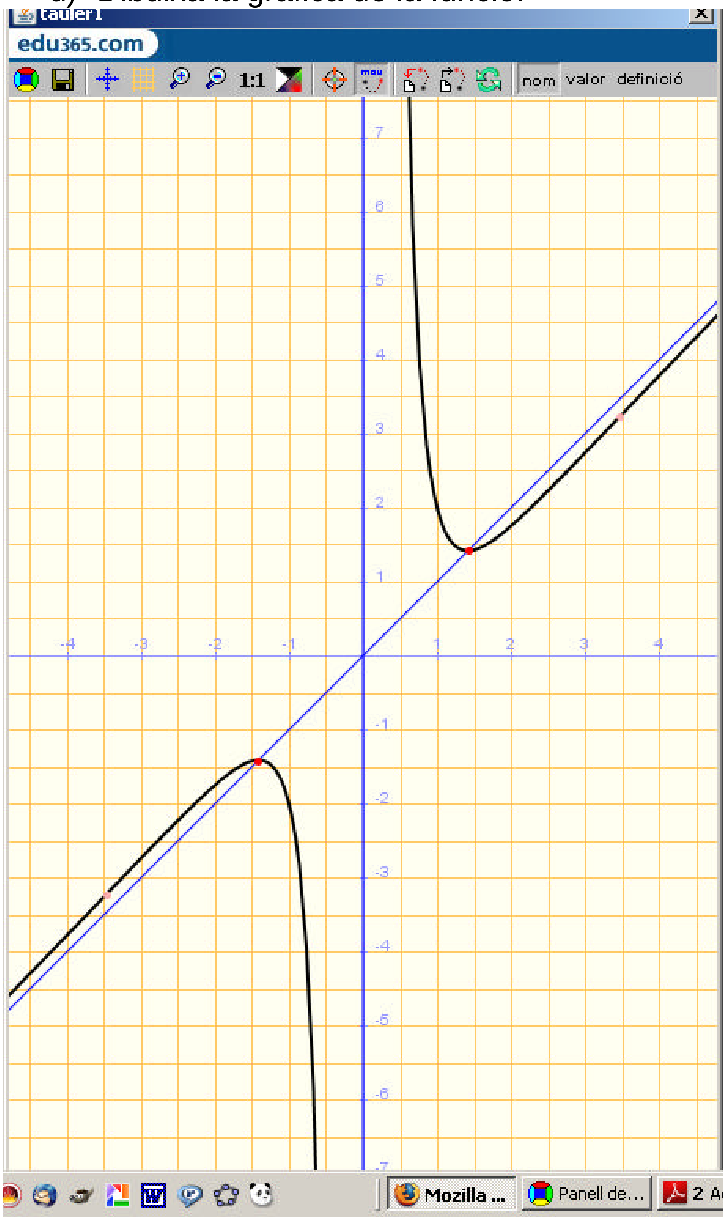
c) Estudia la seva curvatura

Còncava $\forall x \in (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (0,2\sqrt{3})$

Convexa $\forall x \in (-2\sqrt{3},0) \cup (2\sqrt{3},+\infty)$

Punts d'inflexió en $\left(-2\sqrt{3},-3.28\right)$ *i en* $\left(2\sqrt{3},3.28\right)$

d) Dibuixa la gràfica de la funció.



Comentari extra

Si voleu saber quina és la fórmula d'aquesta funció us la puc dir.

És la funció

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^3}$$

i si calculeu les derivades són:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}} = \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} - \frac{6\cdot 4\cancel{x^3}}{x^{\cancel{8}\,5}} = \frac{-2x^2 + 24}{x^4}$$

(2 punts)

3) Trobeu les asímptotes de la funció $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

- Mirem quan el denominador s'anul·la $e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ així doncs sembla que per x=0 poc haver una asímptota vertical, mirem els límits laterals:

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

  $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1^+ - 1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ per tant sí que és asímptota i per l'esquerra la funció se'n va cap a $-\infty$ i per la dreta cap a $+\infty$

- Ara mirem si hi ha asímptotes quan $x \to +\infty$

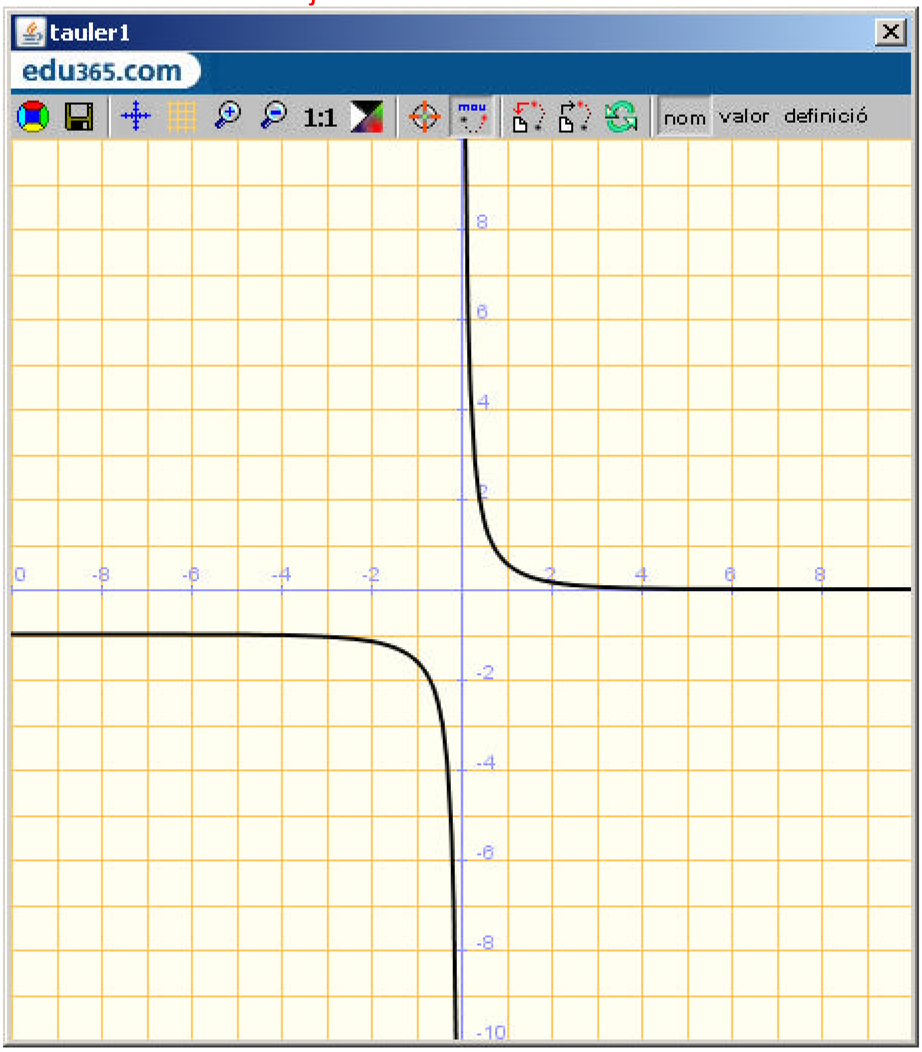
  $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \Rightarrow$ Y=0 és una asímptota horitzontal per $x \to +\infty$

  com hem trobat horitzontal ja no cal mirar les inclinades

- Ara mirem si hi ha asímptotes quan $x \to -\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0 - 1} = -1 \Rightarrow$ Y= –1 és una asímptota horitzontal per $x \to -\infty$

  com hem trobat horitzontal ja no cal mirar les inclinades



(2,5 punts)

4) Calculeu:

a) $\int \frac{2}{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{2}{x}+x^{\frac{1}{2}}dx = 2\cdot\ln|x|+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+k \qquad \forall k\in R$

b) $\int \frac{xdx}{\left(x^2+3\right)^5} = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+3\right)^{-5}dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+3\right)^{-4}}{-4} = \frac{-1}{8\left(x^2+3\right)^4}+k \quad \forall k\in R$

c) $\int \tan(4x)\,dx = \int \frac{\sin(4x)}{\cos(x)}dx = \frac{1}{-4}\int \frac{-4\sin(4x)}{\cos(x)}dx = \frac{-1}{4}\ln|\cos(4x)|+k \quad \forall k\in R$

d) $\int x\cdot e^{-3x^2+2009}dx = \frac{1}{-6}\int -6x\cdot e^{-3x^2+2009}dx = \frac{-1}{6}e^{-3x^2+2009}+k \qquad \forall k\in R$

e)

$$\int \sin(5x)\cdot\cos(5x)dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x)\cdot 5\cdot\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}\frac{\sin^2(5x)}{2}+k = \frac{\sin^2(5x)}{10}+k$$

$\forall k\in R$

f)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-8x^6}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(\sqrt{8}x^3\right)^2}}dx = \frac{1}{3\sqrt{8}}\int \frac{3\sqrt{8}x^2}{\sqrt{1-\left(\sqrt{8}x^3\right)^2}}dx = \frac{1}{3\sqrt{8}}\arcsin(\sqrt{8}x^3)+k =$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{8}\sqrt{8}}\arcsin(\sqrt{8}x^3)+k = \frac{\sqrt{8}}{24}\arcsin(\sqrt{8}x^3)+k = \frac{2\sqrt{2}}{24}\arcsin(\sqrt{8}x^3)+k =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\arcsin(\sqrt{8}x^3)+k \qquad \forall k\in R$$

(3 punts)