Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

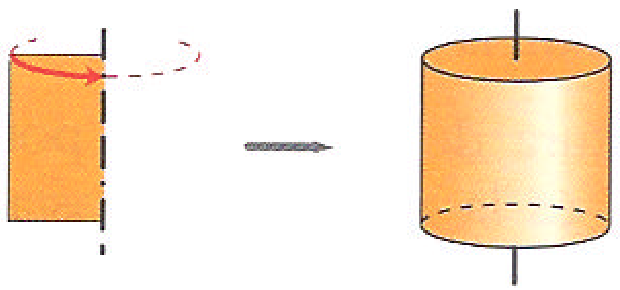
1) El valor, en milions d'euros, d'una empresa en funció del temps t (en anys) ve donat per l'expressió $f(t) = 40 + 14t - (t-2)^2$ on $0 \leq t \leq 10$
   a) Dedueix en quin any va aconseguir el valor màxim i en quin any n'aconseguí el valor mínim.
   b) Quins van ser aquests valors màxims i mínim de l'empresa?

(1,5 punts)

2) Donada la funció $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$
   a) Quin és el seu domini
   b) Trobeu les seves asímptotes.
   c) Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
   d) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
   e) Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

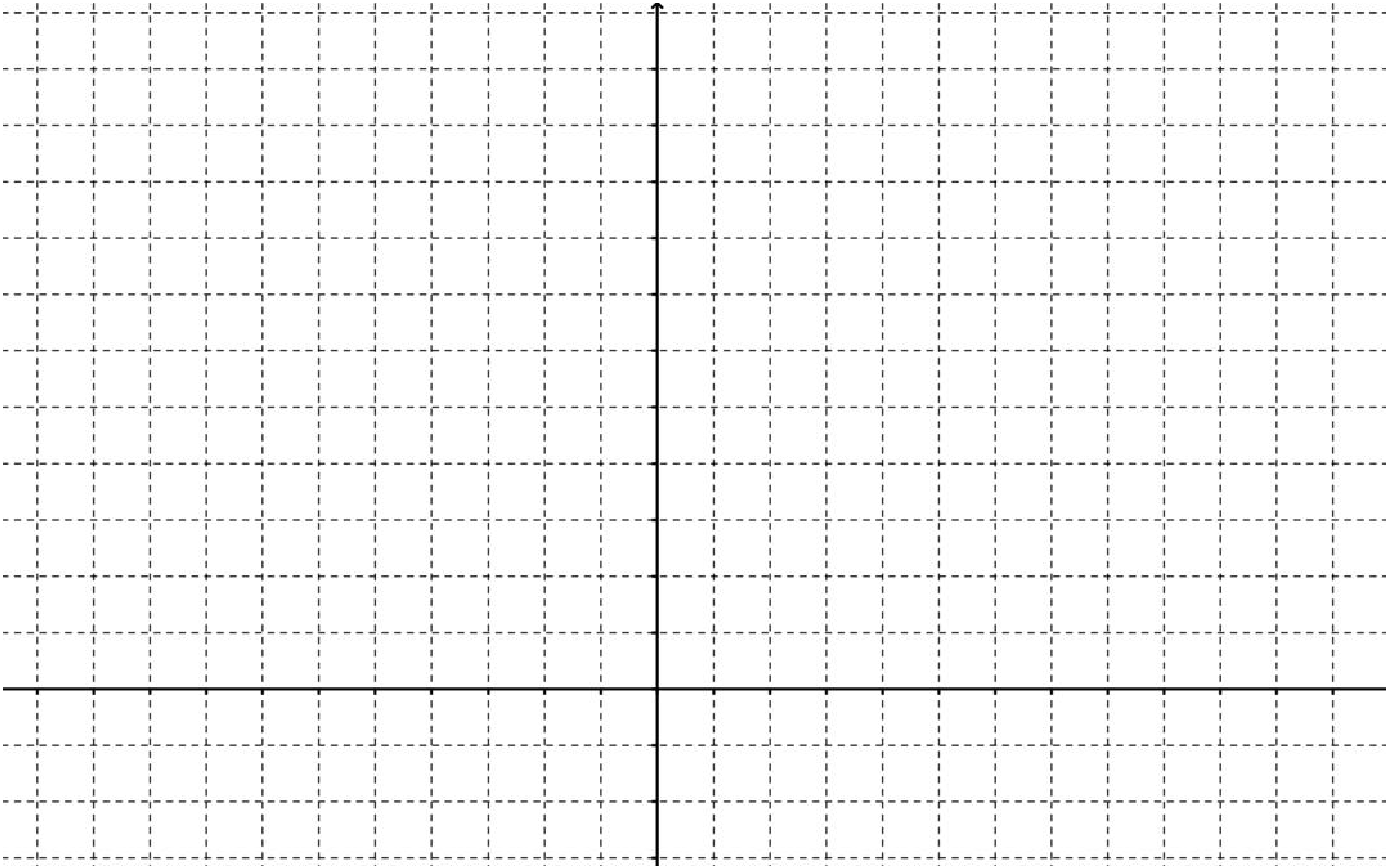
(0,25+1,25+1,5 * 3= 6 punts)

3) Trobeu la base i l'altura d'una cartolina rectangular de perímetre 60 cm que, en fer la volta completa al voltant d'un costat vertical, generi un cilindre de volum màxim.



(2,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**



Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) El valor, en milions d'euros, d'una empresa en funció del temps t (en anys) ve donat per l'expressió $f(t) = 40 + 14t - (t-2)^2$ on $0 \le t \le 10$
   a) Dedueix en quin any va aconseguir el valor màxim i en quin any n'aconseguí el valor mínim.
   b) Quins van ser aquests valors màxims i mínim de l'empresa?

(1,5 punts)

$f(t) = 40 + 14t - (t-2)^2$

DOMINI $= [0, 10]$

Candidats a extrems absoluts els extrems dels intervals tancats del domini $\Rightarrow \boxed{t = 0 \text{ i } t = 10}$

i els candidats a extrems relatius, és a dir els t tals que $f'(t) = 0$

$f'(t) = 14 - 2(t-2) \Rightarrow$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 14 - 2t + 4 = 0$

$18 = 2t$

$\boxed{9 = t}$

Així doncs per veure on està el màxim i el mínim absolut només cal avaluar la funció en aquests 3 candidats

$f(0) = 40 - 4 = 36$ milions d'€

$f(9) = 40 + 14 \cdot 9 - 7^2 = 117$ milions d'€

$f(10) = 40 + 14 \cdot 10 - 8^2 = 116$ milion d'€

Així doncs tenim

- El màxim absolut l'any 9 de l'empresa. ~~Data~~ on tenia un valor de 117 milions d'€
- El mínim absolut va ser a l'inici de l'empresa any = 0 on tenia un valor de 36 milions d'€

2) Donada la funció $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

a) Quin és el seu domini
b) Trobeu les seves asímptotes.
c) Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
d) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
e) Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

(0,25+1,25+1,5 * 3= 6 punts)

a) El domini de la funció és $R - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Asímptota vertical en x=2 ja que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

i sabem que pels dos costats del 2 se'n va a $+\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Asímptota horitzontals no hi ha per $x \to +\infty$ i per $x \to -\infty$ el límits de les funció dóna infinit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x)^3}{(-x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

En canvi veurem que sí que hi ha asímptota inclinada per $x \to +\infty$ (que com és un quocient de polinomis també ho és per $x \to -\infty$)
L'asímptota és una recta Y=mX+n on

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x(x-2)^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - (x^3 - 4x^2 + 4x)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 4 = 4$$

Per tant la recta Y = X + 4 és asímptota per $x \to \pm\infty$

Abans de fer els dos apartats següents c) i d), calculem primer les dues primeres derivades i les simplificarem al màxim.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{\cancel{(x-2)}\left[3x^2(x-2) - x^3 2\right]}{(x-2)^{\cancel{4}3}} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2-12x)(x-2)^3-(x^3-6x^2)3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{\cancel{(x-2)^2}\left[(3x^2-12x)(x-2)-(x^3-6x^2)3\right]}{(x-2)^{\cancel{6}\,4}}=$$

$$=\frac{\cancel{3x^3}\ \cancel{-12x^2}\ \cancel{-6x^2}+24x\ \cancel{-3x^3}+\cancel{18x^2}}{(x-2)^3}=\frac{24x}{(x-2)^4}$$

c) Ara estudiant els signes de la y ' trobarem els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

x		**0**		**2**		**6 Mín**	
f (x)	↗↗↗↗↗	0	↗↗↗↗↗↗	∄	↘↘↘↘↘↘	13,5	↗↗↗↗↗↗
f ' (x)	+ + + + + +	0	+ + + + + + +	∄	− − − − −	0	+ + + + + + +

Per tant:

- Creix en $(-\infty,2)\cup(6,0)$
- Decreix en (2,6)
- Té un mínim X= 6 és a dir en (6,f(6))= (6, 13.5)

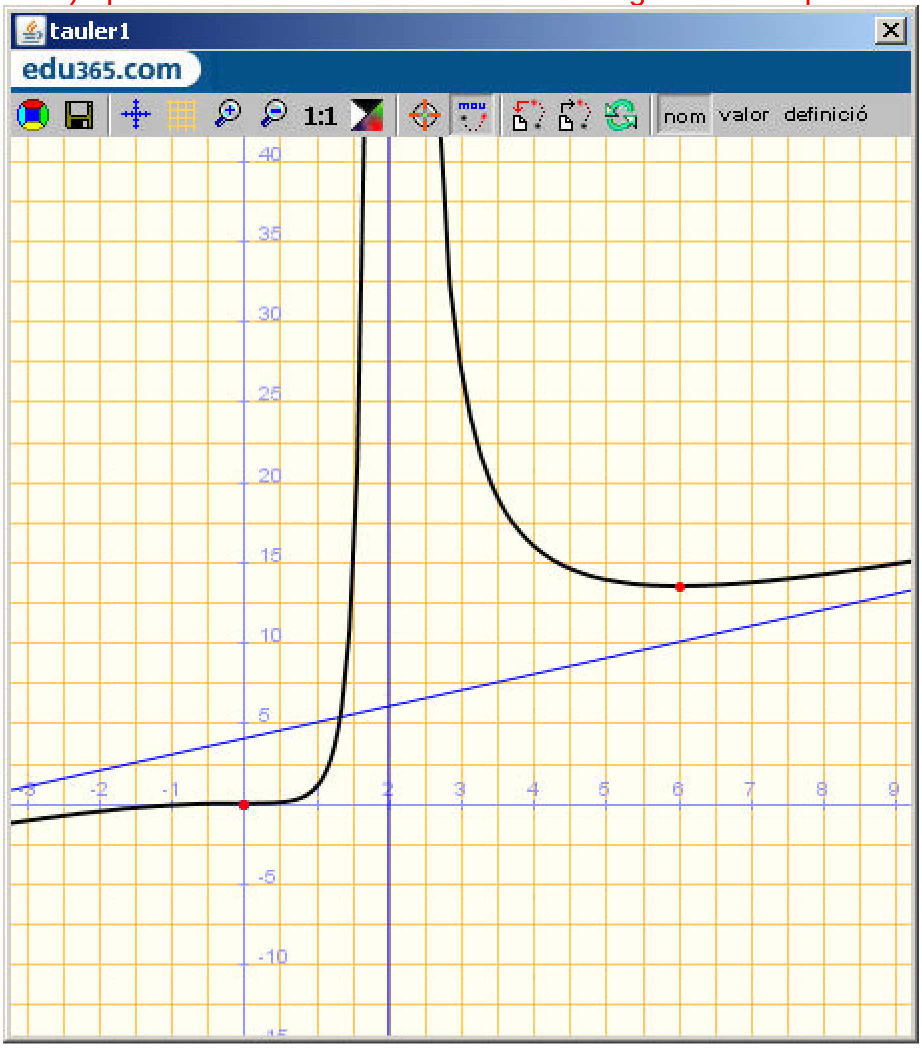
d) Ara estudiant els signes de la y '' trobarem els seus punts d'inflexió i la seva curvatura.

x		**0**		**2**		**6 Mín.**	
f (x)	↗↗↗↗↗	0	↗↗↗↗↗↗	∄	↘↘↘↘↘↘	13,5	↗↗↗↗↗↗
f ' (x)	+ + + + + +	0	+ + + + + + +	∄	− − − − −	0	+ + + + + + +
f '' (x)	− − − − −	0	+ + + + + + +	∄	+ + + + + + +		

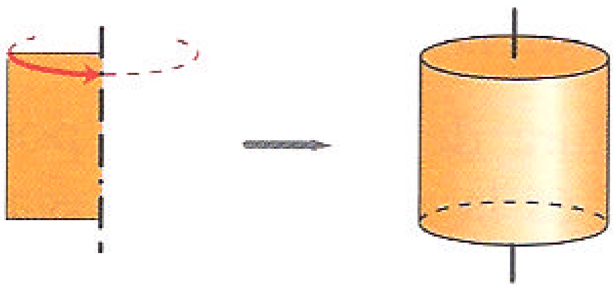
Per tant:

- Convexa en $(-\infty,0)$
- Còncava en $(0,2)\cup(2,+\infty)$
- Punts d'inflexió en x=0 és a dir en (0,f(0))=(0,0).

e) I per tant recollint tota la informació la gràfica és aquesta:



3) Trobeu la base i l'altura d'una cartolina rectangular de perímetre 60 cm que, en fer la volta completa al voltant d'un costat vertical, generi un cilindre de volum màxim.



(2,5 punts)

x = la base de la cartolina en cn
y = l'altura de la cartolina en cm

Funció a optimitzar f(x, y) = $p\ x^2 \cdot y$

però com sabem que Sabem que: $2x + 2y = 60$ cm $\Rightarrow$ $x + y = 30$ $\Rightarrow Y = 30 - X$
tenim que la funció a optimitzar és

$$f(x) = \pi\, x^2 \cdot (30 - x) = \pi\, (30x^2 - x^3)$$

El domini d'aquesta funció és $(0,30)$ o [0,30] si considerem els casos extrems en els que desapareix el cilindre.

Busquem els candidats a extrems igualant la derivada a zero:

$$f\,'(x) = \pi\, (60x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow 3x(20 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$$

Ara per assegurar-nos que passa en aquests candidats, estudiem el creixement i decreixement de la funció en el seu domini i tenim que donant valors als tres candidats a extrems absoluts (x=0, 20 i 30) podem trobar els extrems absoluts de la funció.

x	**x<0**	**0**		**20**		**30**	**x>30**
f (x)	$\nexists$	0	↗↗↗↗↗↗	$4000\,\pi$	↘↘↘↘↘↘	0	$\nexists$
f ' (x)	$\nexists$	0	+ + + + + +	**0**	– – – – – –	–	$\nexists$

Així doncs podem assegurar que per x = 20 cm tenim el màxim absolut buscat de la funció que és un volum màxim de f(20)= $4000\,\pi$ cm^3
I per trobar el valor de l'altra variable substituïm: y= 30 – x = 30 – 20 = 10 cm

Solució: La cartolina que genera el cilindre de volum màxim ($4000\,\pi$ cm^3) **és la de 20 cm de base i 10 cm d'alçada.**