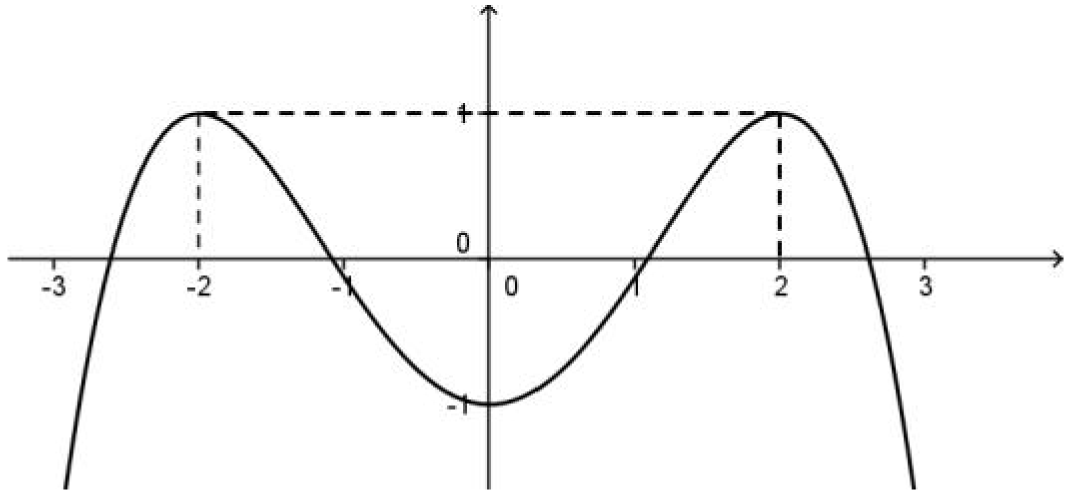
Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Considera una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval (-3,3) és la següent:



   a) Determina les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
   b) Estudia el creixement i decreixement de la funció a l'interval (-3,3).
   c) Fes un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
   d) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, troba de quina funció es tracta.

(0,3+0,3+0,4+0,75=1,75 punts)

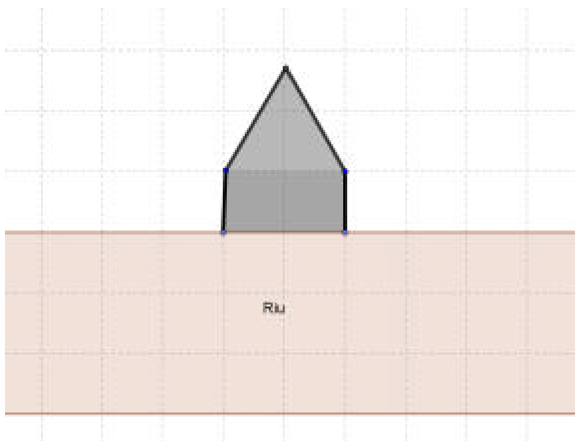
2) Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$

   a) Quin és el seu domini
   b) Trobeu les seves asímptotes.
   c) Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
   d) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
   e) Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

(0,25+1,25+1,5 * 3= 6 punts)

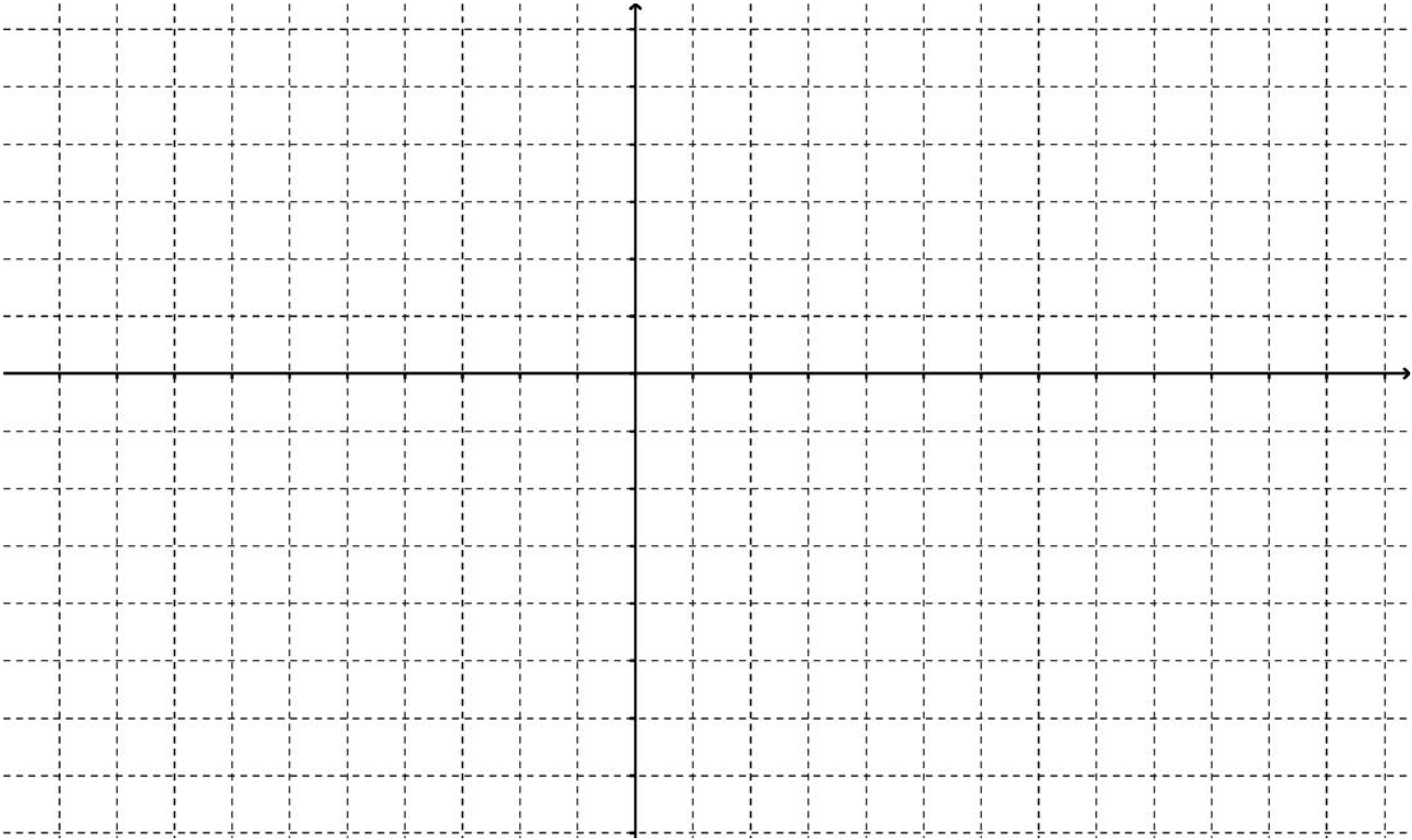
3) A la vora del riu Besòs es permetrà al gener del 2012 que unes persones escollides puguin delimitar-se unes parcel·les per a fer horts urbans. Però hi ha unes condicions. Cal que totes les parcel·les:
   - siguin un rectangle amb un costat tocant la vora del riu i al costat oposat han d'acabar coronades amb un triangle equilàter tal com es mostra a la figura adjunta.
   - La parcel·la s'ha de delimitar amb una tanca de 1000 m per tots els costats exteriors, menys el que toca la vora del riu.

   Calculeu quina ha de ser la dimensió de la parcel·la per tal que l'àrea delimitada sigui màxima.



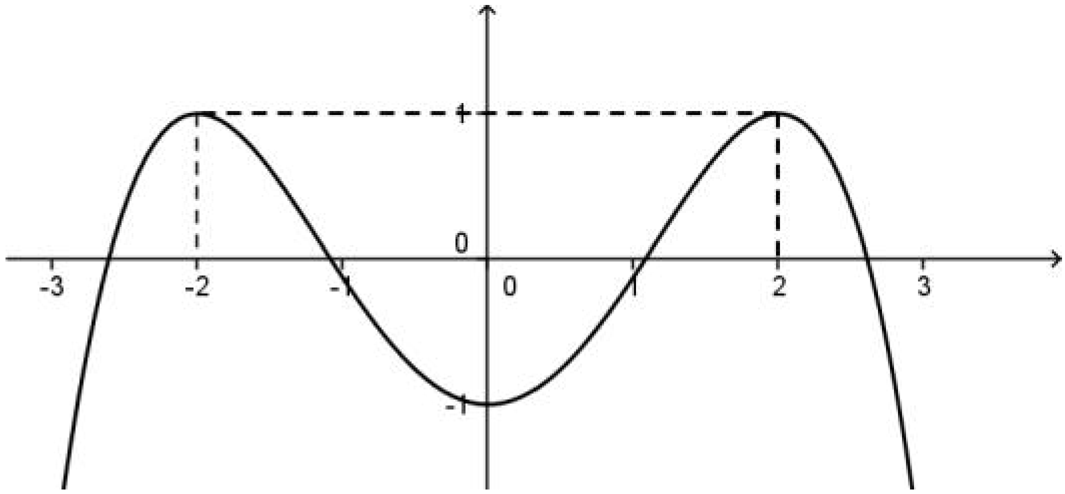
(2,25 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**



Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Considera una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval (-3,3) és la següent:



a) Determina les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
b) Estudia el creixement i decreixement de la funció a l'interval (-3,3).
c) Fes un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
d) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, troba de quina funció es tracta.

(0,3+0,3+0,4+0,75=1,75 punts)

Solució:

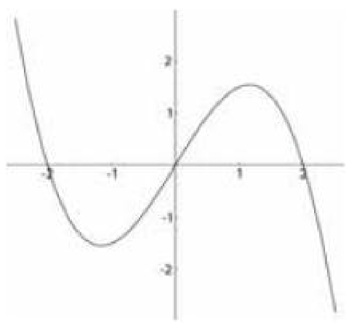
a) És fàcil observar que els màxims relatius es troben quan $x = -2$ i $x = 2$. El mínim relatiu té abscissa $x = 0$.

b) D'acord amb la gràfica, la funció és
- creixent a $(-3,-2) \cup (0,2)$.
- decreixent a $(-2,0) \cup (2,3)$.

Gràficament,

(-3,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,3)
↗	↘	↗	↘

c) La gràfica de la derivada és



d) Sabem que $f(-2)=1$, $f(2)=1$, $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$, $f'(0)=0$ i $f(0)=-1$.
És a dir, tenim el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} 16a+4b+c=1 \\ 16a+4b+c=1 \\ -32a-4b=0 \\ 32a+4b=0 \\ c=-1 \end{array}\right\}$$ que té per solucions $a=-1/8$, $b=1$ i $c=-1$.

O sigui, que la funció és $f(x)=-x^4/8+x^2-1$.

2) Donada la funció $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$

a) Quin és el seu domini
b) Trobeu les seves asímptotes.
c) Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
d) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
e) Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

(0,25+1,25+1,5 * 3= 6 punts)

a) El domini de la funció és $R-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

b) Asímptota vertical en x=1 ja que

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

i sabem que per l'esquerra la funció tendeix a $-\infty$ i per

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

la dreta cap a $+\infty$

Asímptota horitzontals sí hi ha per $x\to+\infty$ (que com és un quocient de polinomis també ho és per $x\to-\infty$) ja que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x)^2}{(-x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^3}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0^-$$

Així doncs la recta Y=0 és asímptota tant per $x\to+\infty$ com per $x\to-\infty$

Abans de fer els dos apartats següents c) i d), calculem primer les dues primeres derivades i les simplificarem al màxim.

$$f\,'(x)=\frac{2x\left(x-1\right)^{3}-x^{2}3\left(x-1\right)^{2}}{\left(x-1\right)^{6}}=\frac{\cancel{\left(x-1\right)^{2}}\left[2x\left(x-1\right)-3x^{2}\right]}{\left(x-1\right)^{\cancel{6}4}}=\frac{\left[2x^{2}-2x-3x^{2}\right]}{\left(x-1\right)^{\cancel{6}4}}=\frac{-x^{2}-2x}{\left(x-1\right)^{4}}$$

$$f\,''(x)=\frac{\left(-2x-2\right)\left(x-1\right)^{4}-\left(-x^{2}-2x\right)4\left(x-1\right)^{3}}{\left(x-1\right)^{8}}=\frac{\cancel{\left(x-1\right)^{3}}\left[\left(-2x-2\right)\left(x-1\right)-\left(-x^{2}-2x\right)4\right]}{\left(x-1\right)^{\cancel{8}5}}=$$

$$=\frac{\left[-2x^{2}\cancel{-2x}+\cancel{2x}+2+4x^{2}+8x\right]}{\left(x-1\right)^{5}}=\frac{2x^{2}+8x+2}{\left(x-1\right)^{5}}$$

c) Ara estudiant els signes de la y ' trobarem els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

x		**–2** **Mínim**		**0** **Màxim**		**1**	
f (x)	↘↘↘↘↘↘↘	–0,15	↗↗↗↗↗	0	↘↘↘↘↘↘	∄	↘↘↘↘↘↘
f ' (x)	– – – – –	0	+ + + + + +	0	– – – – –	∄	– – – – –

Per tant:

- Decreix en $(-\infty,-2)\cup(0,1)\ \cup(1,+\ \infty)$
- Creix en (–2,0)
- Té un mínim X= –2, és a dir en (–2,f(–2))= (–2, –0.15)
- Té un màxim en X=0, és a dir en (0,f(0))=(0,0)

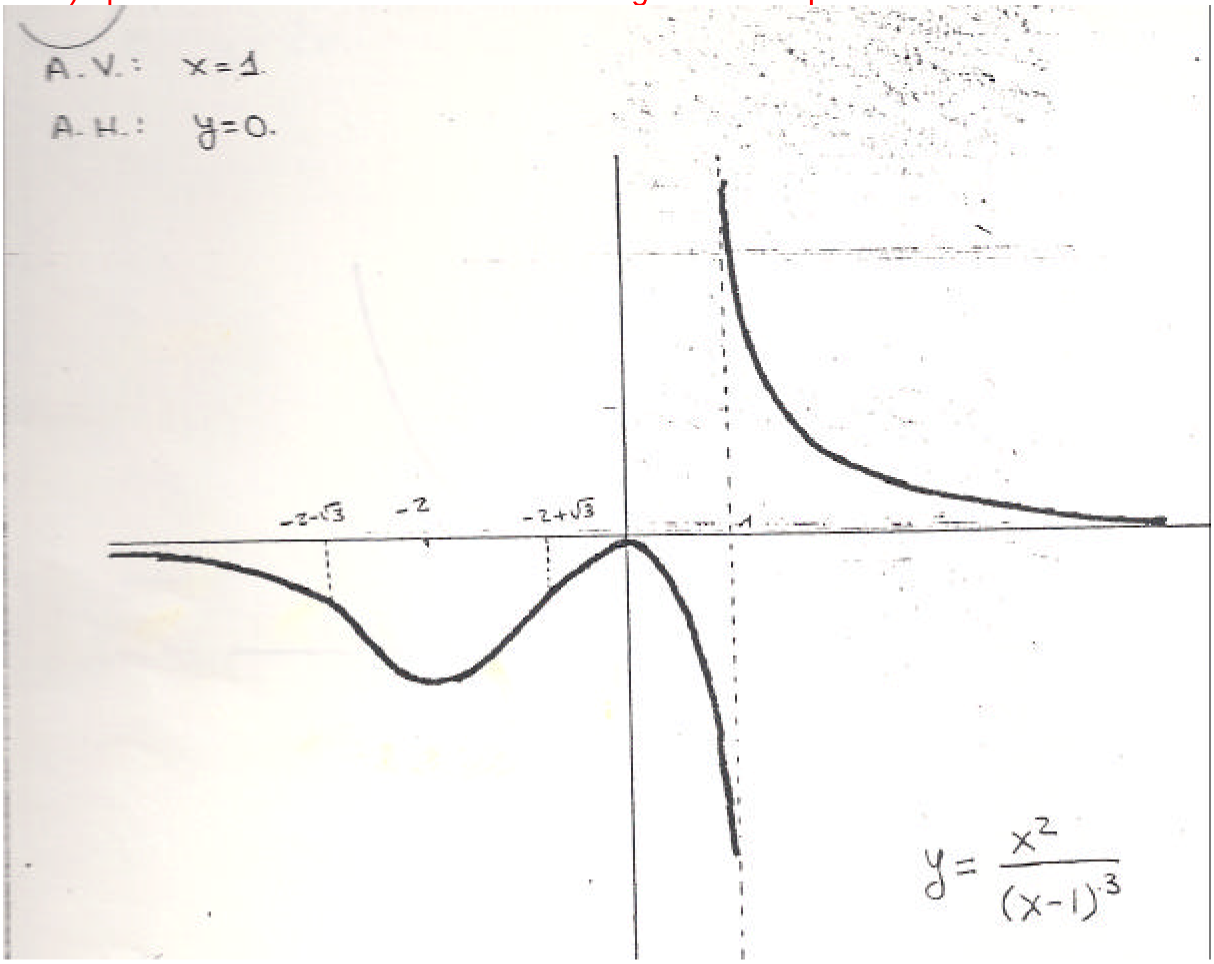
d) Ara estudiant els signes de la y " trobarem els seus punts d'inflexió i la seva curvatura.

x		$-2-\sqrt{3}\simeq$ $\simeq-3{,}73$ **P.I.**		**–2**		$-2+\sqrt{3}\simeq$ $\simeq-0{,}27$ **P.I.**		**0**		**1**	
f (x)		↘↘↘↘↘↘↘		–0,15		↗↗↗↗↗↗		0	↘↘↘	∄	↘↘↘↘↘
f ' (x)		– – – – – –		0		+ + + + + + +		0	– –	∄	– –
f " (x)	– – –	0	+ + + + + + + +				0	– – – – – – –		∄	+ + + +

Per tant:

- Convexa en $(-\infty,-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3},1)$
- Còncava en $(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3})\cup\ (1,+\ \infty)$
- Punts d'inflexió en x= $-2-\sqrt{3}$ és a dir en $(-2-\sqrt{3}$,f$(-2-\sqrt{3}$))= =(– 3.73, – 0,13).
- Punts d'inflexió en x= $-2+\sqrt{3}$ és a dir en $(-2+\sqrt{3}$,f$(-2+\sqrt{3}$))= =(– 0,27, – 0,04).

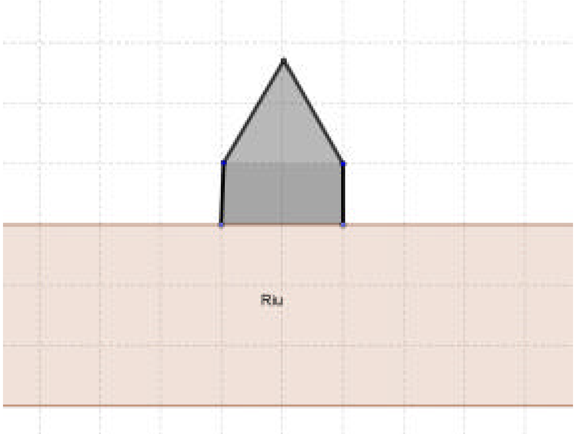
e) I per tant recollint tota la informació la gràfica és aquesta:



3) A la vora del riu Besòs es permetrà al gener del 2012 que unes persones escollides puguin delimitar-se unes parcel·les per a fer horts urbans. Però hi ha unes condicions. Cal que totes les parcel·les:

- siguin un rectangle amb un costat tocant la vora del riu i al costat oposat han d'acabar coronades amb un triangle equilàter tal com es mostra a la figura adjunta.
- La parcel·la s'ha de delimitar amb una tanca de 1000 m per tots els costats exteriors, menys el que toca la vora del riu.

Calculeu quina ha de ser la dimensió de la parcel·la per tal que l'àrea delimitada sigui màxima.



(2,25 punts)

x = la base del rectangle en m
y = l'altura del rectangle m
Així doncs el triangle equilàter de sobre és de costat x i podem calcular la seva altura aplicant el teorema de Pitàgores:

Altura = $\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,x}{2}$

I la funció a optimitzar és f(x, y) = $x\cdot y+\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}\,x}{2}=x\cdot y+\frac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$

però com sabem que sabem que: 2 x + 2 y = 1000 cm $\Rightarrow$ $y=500-x$ $\Rightarrow$ la funció a optimitzar expressada en un única variable és

$$f(x)=x\cdot(500-x)+\frac{\sqrt{3}\,x^2}{4}=\frac{2000x-4x^2+\sqrt{3}\,x^2}{4}$$

El domini d'aquesta funció és $(0,500]$ ja que podem considerar el cas que y=0 com a vàlid.

Busquem els candidats a extrems igualant la derivada a zero:

$$f\,'(x)=\frac{1}{4}\left(2000-8x+2\sqrt{3}\,x\right)=0\Leftrightarrow 2000-x(8-2\sqrt{3})=0\Leftrightarrow x=\frac{2000}{8-2\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\simeq 440{,}93m$$

Ara per assegurar-nos que passa en aquests candidats, estudiem el creixement i decreixement de la funció en el seu domini.

X	X <= 0		$\frac{2000}{8-2\sqrt{3}}\simeq$ $\simeq 440{,}93m$		500	X > 500
f (x)	$\nexists$	↗↗↗↗↗↗		↘↘↘↘↘↘		$\nexists$
f ' (x)	$\nexists$	+ + + + + +	0	− − − − − −		$\nexists$

Així doncs podem assegurar que per x = $\frac{2000}{8-2\sqrt{3}}\simeq 440{,}93m$ tenim el màxim absolut buscat de la funció. I per trobar el valor de l'altra variable substituïm:
Y= 500 – X = 500 – 440,93 = 59,07 m $\Rightarrow$ y= 59,07 m

Solució: La parcel·la d'àrea màxima és la formada per un rectangle de base 440,93 m i altura 59,07 m que es corona amb un triangle equilàter de costat 440,93 m m.