



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

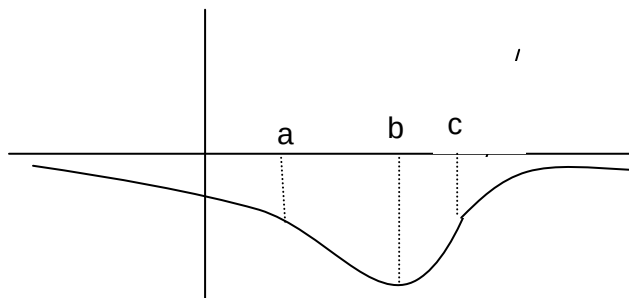
- 1) Sigui la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = e^x \cdot (ax + b)$, en què a i b són nombres reals.

- Calcula a i b perquè la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3, e^3)$.
- Per als valors a i b obtinguts, digues quin tipus d'extrem relatiu té la funció en el punt esmentat.

[2 punts]

- 2) Una funció $f(x)$ contínua i derivable, té una asymptota horitzontal en $y=0$, té un mínim en $x=b$ i dos punts d'inflexió en $x=a$ i $x=c$. El seu gràfic és el que mostra la figura.

Dibuixa de manera raonada i esquemàticament el gràfic de $f'(x)$ (funció derivada) [1,5 punts]



- 3) Donada la funció $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

- Quin és el seu domini?
- Trobeu les seves asymptotes (Informació extra: no té inclinades quan $x \rightarrow +\infty$)
- Calculeu i simplifiqueu les dues primeres derivades

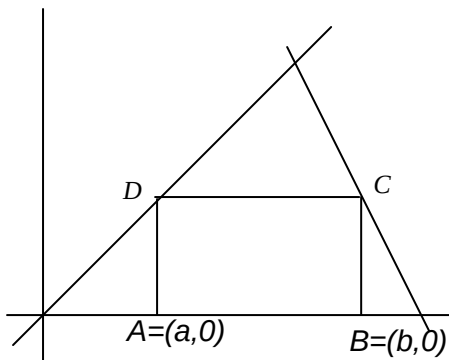
[Us han de sortir $f'(x) = \frac{e^x(x-3)}{(x-1)^3}$

$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 6x + 11)}{(x-1)^4}$

- Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
- Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
- Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

[0,25+0,75+1+0,75+0,5+0,75= 4 punts]

- 4) Calculeu els vèrtexs A, B, C i D del rectangle d'àrea màxima que té un costat sobre l'eix de les x i està inscrit en el triangle que determinen les rectes: $y=0$, $y=x$ i $y=4-2x$.



Pista: els punts C i D tenen la mateixa ordenada

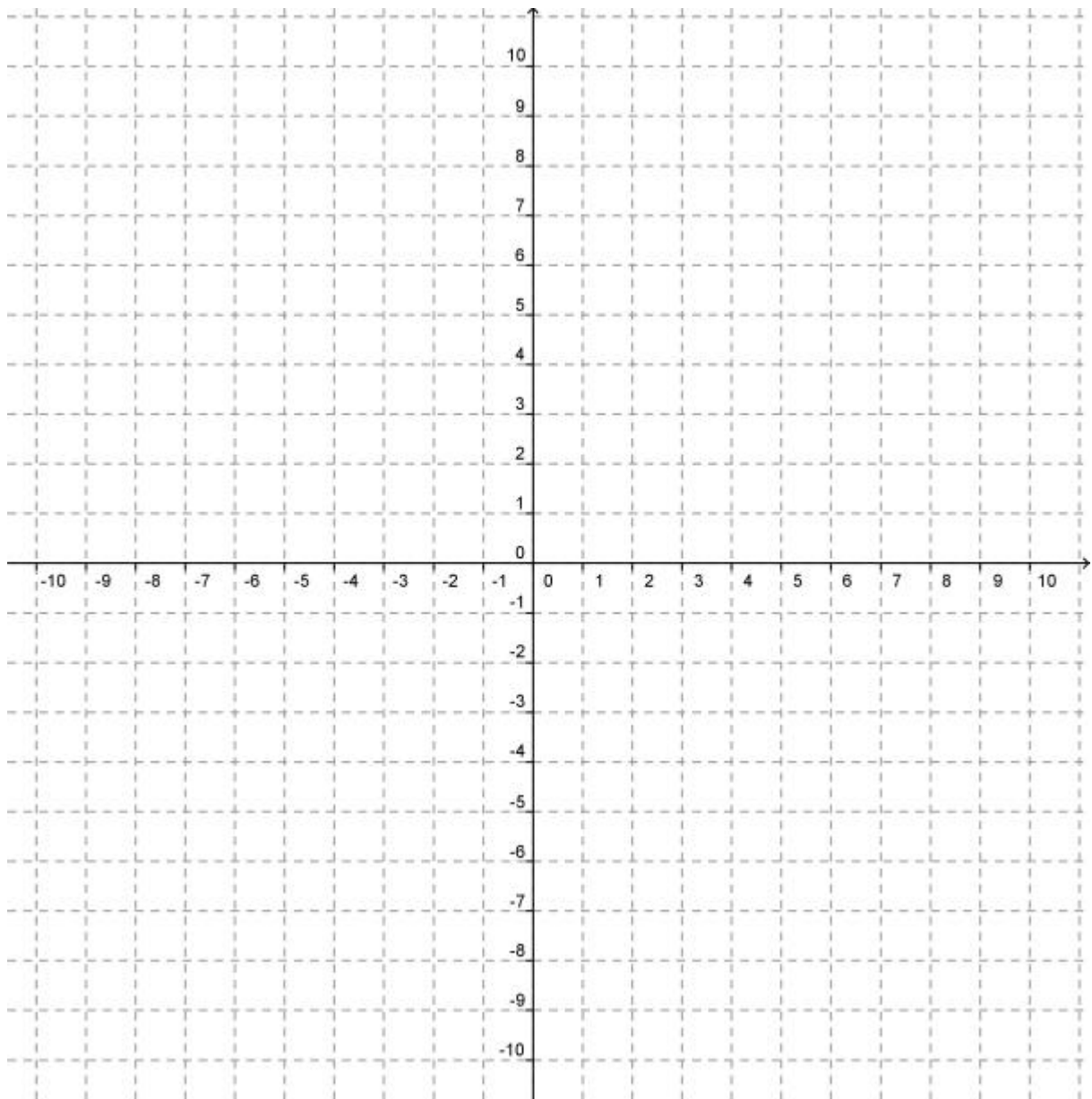
[2,5 punts]



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:





Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Sigui la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = e^x \cdot (ax+b)$, en què a i b són nombres reals.

- Calcula a i b perquè la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3, e^3)$.
- Per als valors a i b obtinguts, digues quin tipus d'extrem relatiu té la funció en el punt esmentat.

[2 punts]

① $f(x) = e^x(ax+b)$

a) $(3, e^3)$ és extrem relatiu $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(3) = 0 \\ f(3) = e^3 \end{array} \right\} \Rightarrow$

I com $f'(x) = e^x(ax+b) + e^x \cdot a = e^x(ax+a+b)$
 $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^3(3a+a+b) = 0 \Rightarrow e^3(4a+b) = 0 \\ e^3(3a+b) = e^3 \Rightarrow 3a+b = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} e^3 = 0 \text{ NO!!} \\ 4a+b = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{array} \right. \xrightarrow{3a-2a} \begin{array}{l} 4a+b=0 \\ a=-1 \end{array}$ i substituint en la 1a $\Rightarrow b=4$

Solució $a=-1$ i $b=4$

b) $f(x) = e^x(4-x)$
 $f'(x) = e^x(4-x) + e^x(-1) = e^x(3-x)$
 Estudiant la seva monotonia

x		3	
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$
$f'(x)$	+	0	-

• Perquè ar $f(x)$ i $f'(x)$ són cont i derivable en $\mathbb{R}$

• Perquè on $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(3-x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x = 0 \text{ NO} \\ x=3 \text{ SI} \end{array} \right.$

• Donant valor a la zona de $f'(x)$

$\left. \begin{array}{l} f'(0) > 0 \\ f'(4) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Determino monotonia (x)}$

$\Rightarrow$ En $x=3$ $(3, e^3)$ hi ha un MÀXIM RELATIU i ABSOLUT de la funció.



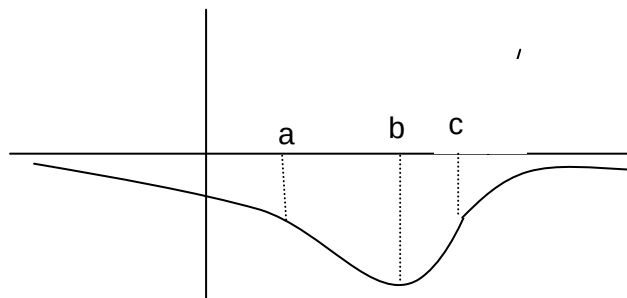
Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 2) Una funció $f(x)$ contínua i derivable, té una asymptota horitzontal en $y=0$, té un mínim en $x=b$ i dos punts d'inflexió en $x=a$ i $x=c$. El seu gràfic és el que mostra la figura.

Dibuixa de manera raonada i esquemàticament el gràfic de $f'(x)$ (funció derivada) [1,5 punts]

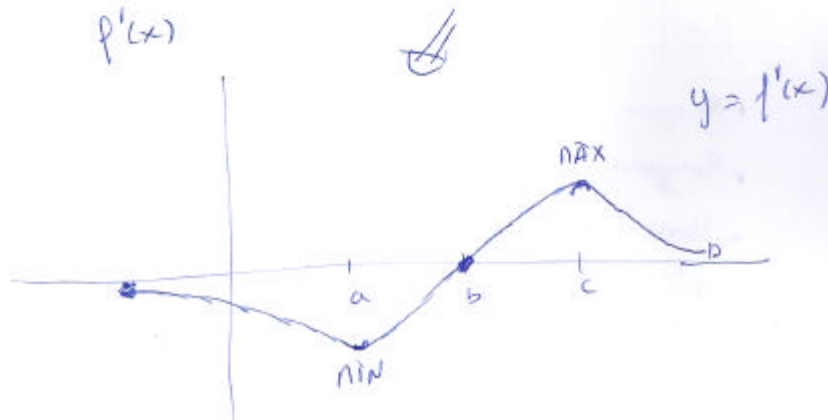


②. Sabem que $y=0$ és ASÍMP horitzontal $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$
 A la vista de la gràfica
 Podem determinar el costat pel que s'acosta al Zero

x	PI a	MIN b	PI c
$f(x)$			
$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +
$f''(x)$	- - - - -	+	0

• Anant la monotonia i el pendent de la derivada
 se que $f'(b)=0$ i $f'(x) < 0$ si $x < b$ i $f'(x) > 0$ si $x > b$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0^-$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0^+$

• També se que $f''(a)=0$ i $f''(c)=0$
 I la curvatura ens permet dir el signe de la 2a derivada $\Rightarrow$ el creixent de $f'(x)$





Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

3) Donada la funció $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

- Quin és el seu domini?
- Trobeu les seves asímptotes (Informació extra: no té inclinades quan $x \rightarrow +\infty$)
- Calculeu i simplifiqueu les dues primeres derivades

[Us han de sortir $f'(x) = \frac{e^x(x-3)}{(x-1)^3}$

$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 6x + 11)}{(x-1)^4}$

- Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
- Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
- Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

[0,25+0,75+1+0,75+0,5+0,75= 4 punts]

③ $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

a) DOMINI $\mathbb{R} - \{1\}$

b) ASÍMP. VERTICAL en $x=1$? Sí i l'aspecte al seu voltant és

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$

ASÍMP HORIZONTAL per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = +\infty \Rightarrow \text{No hi ha}$$

però com $\theta(e^x) > \theta(x^2)$

ASÍMP HORIT per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x (-x-1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$\Rightarrow y=0^+$ és ASÍMP per $x \rightarrow -\infty$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

$$\begin{aligned}
 c) \quad f'(x) &= \frac{e^x (x-1)^{\frac{1}{2}} - e^x 2(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x (x-3)}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \\
 f''(x) &= \frac{[e^x (x-3) + e^x] (x-1)^{\frac{3}{2}} - e^x (x-3) \frac{3}{2} (x-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^3} \\
 f''(x) &= \frac{e^x [(x-3+1)(x-1) - 3(x-3)]}{(x-1)^4} = \\
 f''(x) &= \frac{e^x [(x-2)(x-1) - 3x+9]}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{e^x (x^2 - x - 2x + 2 - 3x + 9)}{(x-1)^4} = \frac{e^x (x^2 - 6x + 11)}{(x-1)^4}
 \end{aligned}$$

d) MONOTONIA = SIGNES $f'(x) = \frac{e^x (x-3)}{(x-1)^3}$

x	1	3
f(x)	↗	↘ ↗
f'(x)	+++	- 0 +++

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{\neq 0} (x-3) = 0 \Leftrightarrow x=3$$

Donant valor a les zones de $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned}
 f'(0) &= \frac{e^0}{+} = \frac{1}{+} > 0 \\
 f'(2) &= \frac{e^2}{+} < 0 \\
 f'(4) &= \frac{e^4}{+} > 0
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\text{A la vista dels signes de} \\
 &f'(x) \Rightarrow \text{determinem MONOTONIA} \quad (*)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ CREIX $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

DECREIX $\forall x \in (1, 3)$

MÍNIM LOCAL en $x=3$ en a dir $(3, \frac{e^3}{4})$
 $(3, 5.02)$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

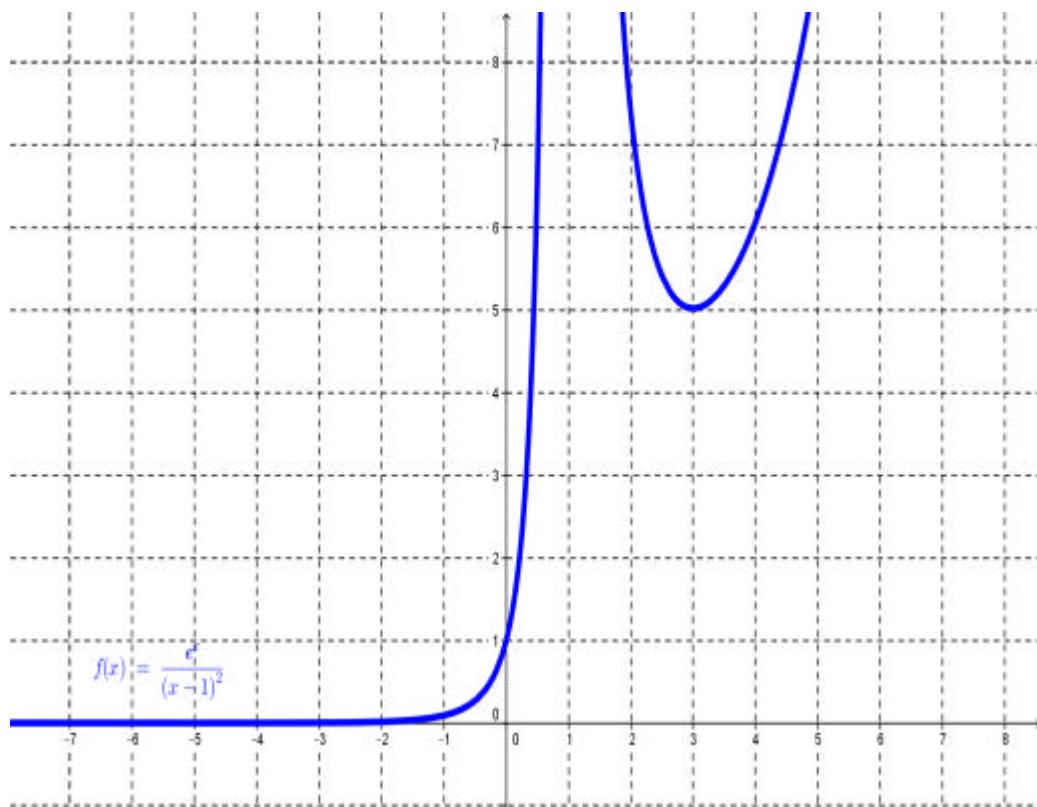
e) CURVATURA = SIGNES $y'' = \frac{e^x}{(x-1)^4} (x^2 - 6x + 11) \neq 0$
 $= \text{Signes } (x^2 - 6x + 11)$ Sempre positiu
 Però com $x^2 - 6x + 11 = 0$
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \nexists$ $\Rightarrow$ $\cup$
 $\Rightarrow f(x)$ és CÒNCAVA $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

f) Així doncs a la vista de taula Resumim

X	1			3		
$f(x)$	$\nearrow$			$\searrow$	$\nearrow$	
$f'(x)$	+	+	+	-	-	0 + +
$f''(x)$	+	+	+	+	+	+

ASÍMPTOTES $y = 0^+$ per $x \rightarrow -\infty$

Podem dibuixar la corba.



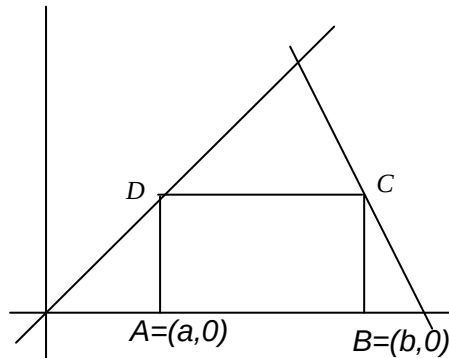


Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 4) Calculeu els vèrtexs A, B, C i D del rectangle d'àrea màxima que té un costat sobre l'eix de les x i està inscrit en el triangle que determinen les rectes: $y=0$, $y=x$ i $y=4-2x$.



Pista: els punts C i D tenen la mateixa ordenada

[2,5 punts]

4

Funció A OPTIMITZAR

Àrea del rectangle $f(a,b) = (b-a) \cdot a$
OH!! que en de 2 variables.

Però se que $a = 4-2b$

$f(b) = (b - (4-2b)) (4-2b) = (b-4+2b) (4-2b)$
 $f(b) = (3b-4) (4-2b) = 12b - 6b^2 - 16 + 8b$
 $f(b) = -6b^2 + 20b - 16$
 $f'(b) = -12b + 20$
 $f''(b) = -12$

Estudiant la monotonia

b	4/3	5/3	2
$f(b)$			
$f'(b)$	+	0	-

$f'(b) = 0 \Leftrightarrow -12b + 20 = 0$
 $20 = 12b$
 $\frac{20}{12} = b$
 $\frac{5}{3} = b$

Donant valor a les zones de $f(b)$

$f'(0) \geq 0$
 $f'(2) < 0$ } $\Rightarrow$ no var

I en concret que per $x = 5/3$ hi ha un MAXIM ABSOLUT

Donant a $b \in [4/3, 2]$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

així doncs les solució en

$$b = \frac{5}{3}$$

$$a = 4 - 2b = 4 - 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{12-10}{3} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ els vèrtexs demanats són:

$$A(a, 0) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$B(b, 0) = \left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

$$C(b, a) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$D(a, a) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

que determinen
un rectangle de

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ (unitat de longitud)}^2$$

$$\text{d'àrea} = \frac{2}{3} u^2$$