



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

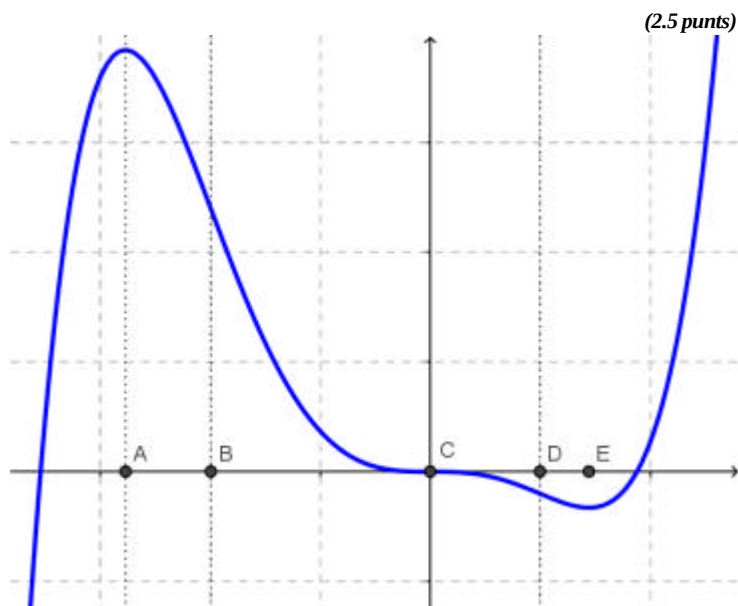
1) Donada la funció $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$

- a) Calcula els valors a, b, c i d sabent que té una asímptota vertical en el punt $x=1$, que la recta $y=3x+2$ n'és una asímptota obliqua, i que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=0$.
- b) A partir del domini, asímptotes i monotonia feu un esbós de la gràfica de la funció.

- 2) Una funció $f(x)$ contínua i derivable, té un màxim en $x=A$, un mínim en $x=E$ i tres punts d'inflexió en $x=B$, $x=C$ i $x=D$.

El seu gràfic és el que mostra la figura.

Dibuixa de manera raonada i esquemàticament el gràfic de $f'(x)$ (funció derivada)



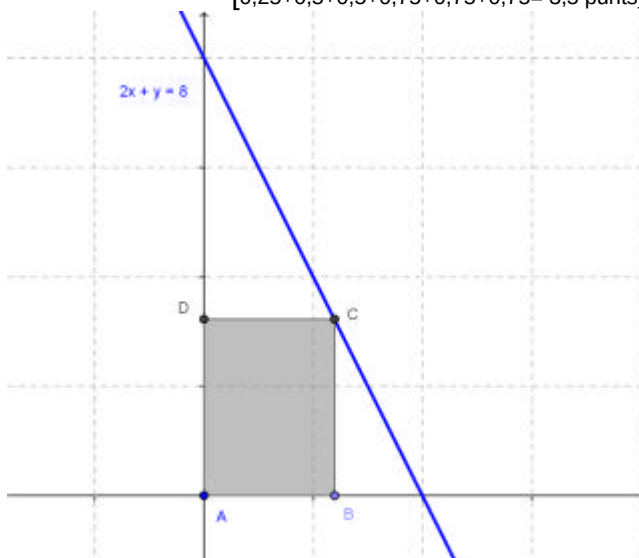
[1,5 punts]

3) Donada la funció $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 4)$

- a) Quin és el seu domini?
- b) Trobeu les seves asímptotes
- c) Calculeu i simplifiqueu les dues primeres derivades
- d) Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
- e) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
- f) Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

[0,25+0,5+0,5+0,75+0,75+0,75= 3,5 punts]

- 4) Dins del triangle limitat pels eixos OX, OY i la recta $2x + y = 8$, s'inscriu un rectangle de vèrtex A(0,0), B(a,0), C(a,b) i D(0,b). Determineu el punt C(a,b) al què correspon el rectangle d'àrea màxima



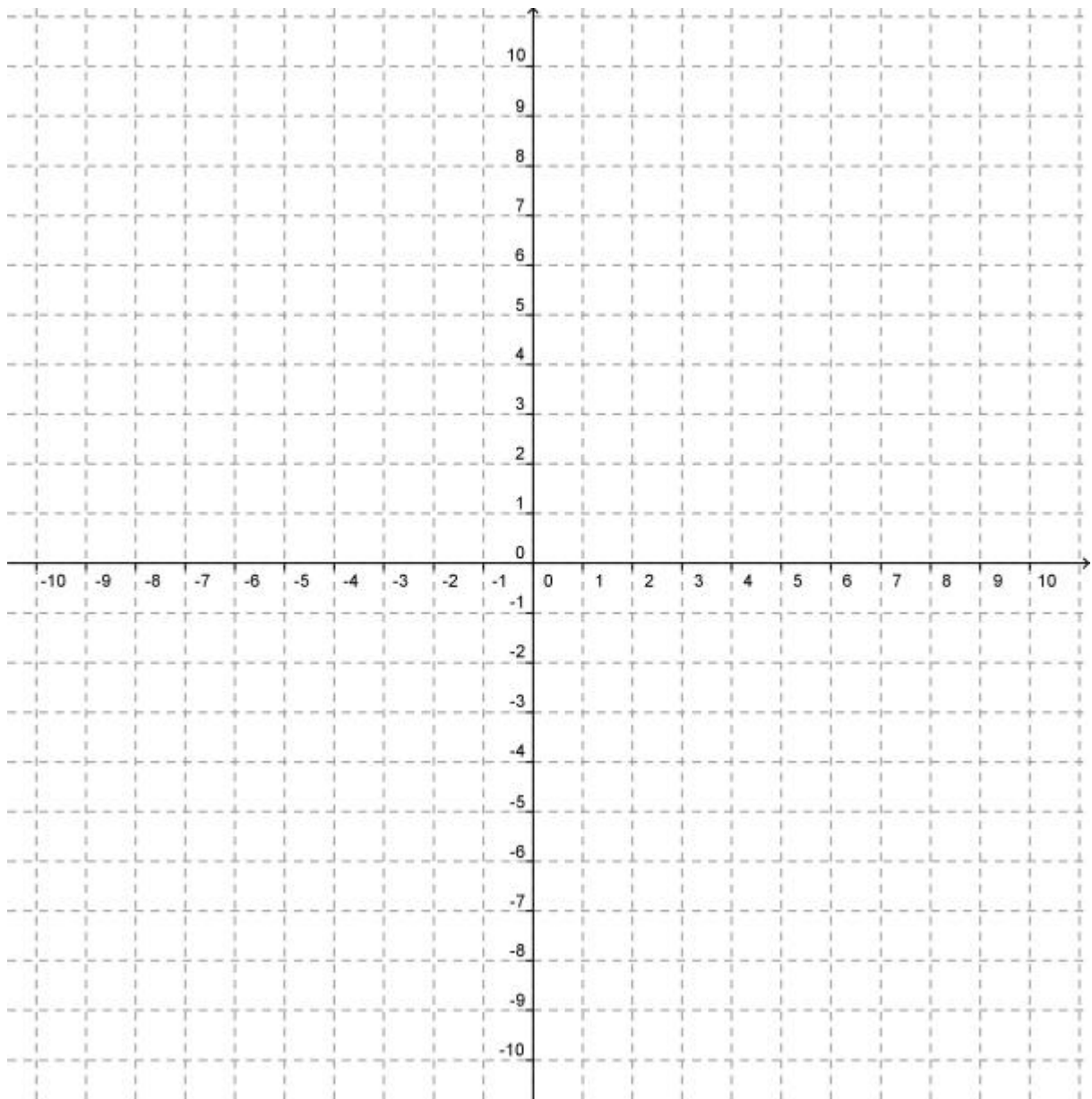
[2,5 punts]



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:





Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donada la funció $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$

- a) Calcula els valors a, b, c i d sabent que té una asímptota vertical en el punt $x=1$, que la recta $y=3x+2$ n'és una asímptota obliqua, i que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=0$.
- b) A partir del domini, asímptotes i monotonia feu un esbós de la gràfica de la funció.

(2.5 punts)

① $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d} \Rightarrow \text{DOMINI} = \mathbb{R} - \{d\}$

a) $x=1$ ASÍMP vertical $\Rightarrow d=1$

$y=3x+2$ Asímptota obliqua $\Rightarrow$

$3 = m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \Rightarrow a=3$

$2 = n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + bx + c}{x-1} - 3x = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + bx + c - 3x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + bx + c - 3x^2 + 3x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+3)x + c}{x-1}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+3)x + c}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+3)x}{1x} = b+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b+3=2 \Rightarrow b=-1$

Extrem relatiu en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0$

$f'(x) = \frac{(6x-1)(x-1) - (3x^2 - x + c) \cdot 1}{(x-1)^2}$

$f'(0) = \frac{(-1)(-1) - (c) \cdot 1}{1} = 1 - c \Rightarrow 1 - c = 0 \Rightarrow c=1$

Així doncs $a=3, b=-1, c=1, d=1$

$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x-1}$

b) per debuxar la gràfica debuxem les asímptotes

$x=1$

$y=3x+2$

x	y
0	2
1	5
2	8



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

Estudiem la monotonia = signes de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(x-1) - (3x^2-x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x - x + 1 - 3x^2 + x - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2}$$

x	0	1	2
y	↗	↘	↗
y'	+ 0 -	- 0 +	

$\nexists f(x)$ ni $f'(x)$ en $x=1$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0$$

$$x(3x-6)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Signes $f'(x) = \text{signes } (3x^2-6x)$

com $(x-1)^2 > 0$

$\Rightarrow$ A la vista del signe de $f'(x)$ determinem la monotonia

$\Rightarrow$ CREIX $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

DECREIX $\forall x \in (0, 1) \cup (1, 2)$

MÀX en $x=0$ $f(0) = -1$ $(0, -1)$

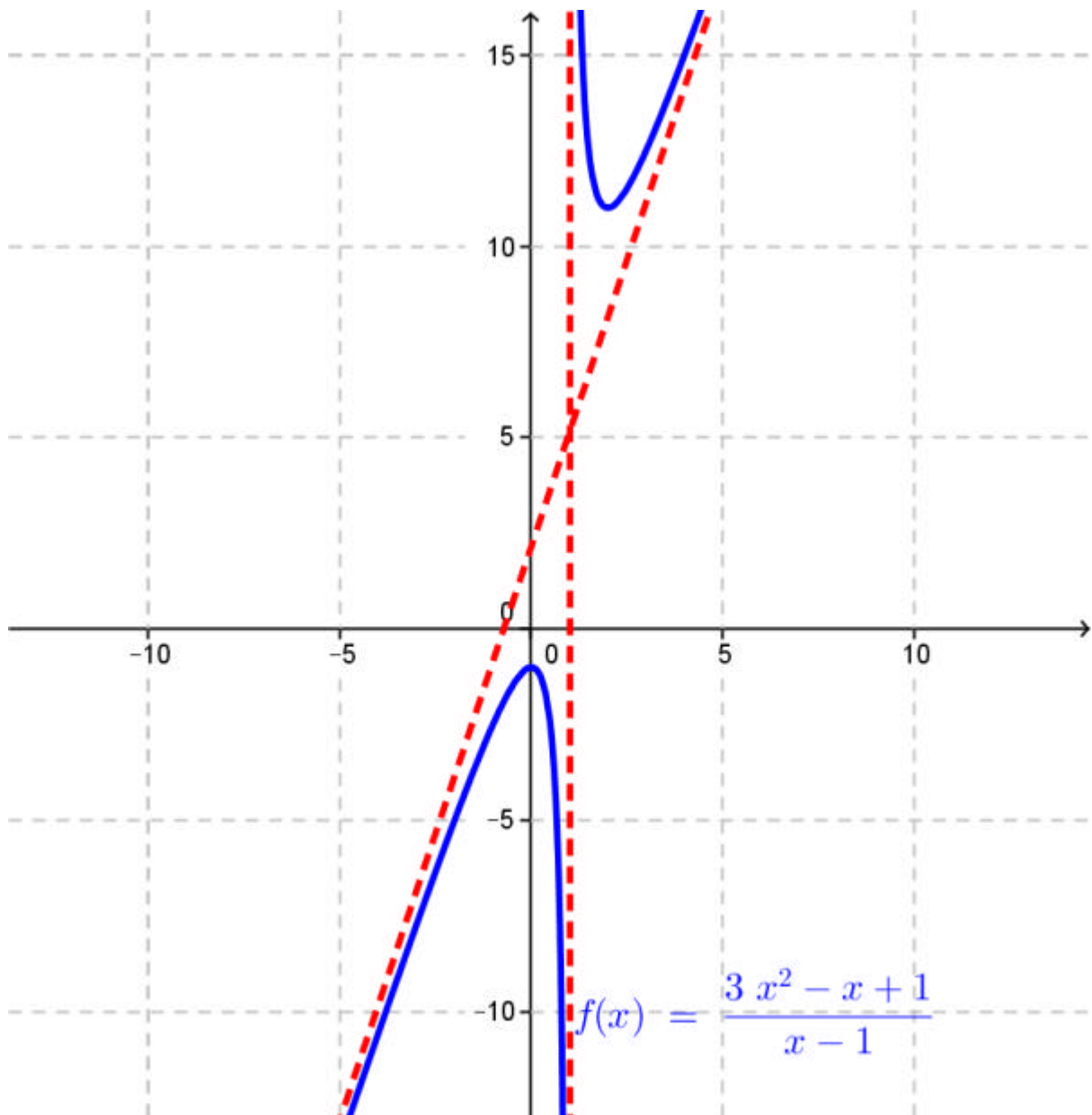
MÍN en $x=2$ $f(2) = \frac{3 \cdot 4 - 2 + 1}{2 - 1} = \frac{11}{1} = 11 \Rightarrow (2, 11)$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:





Nom i Cognoms:

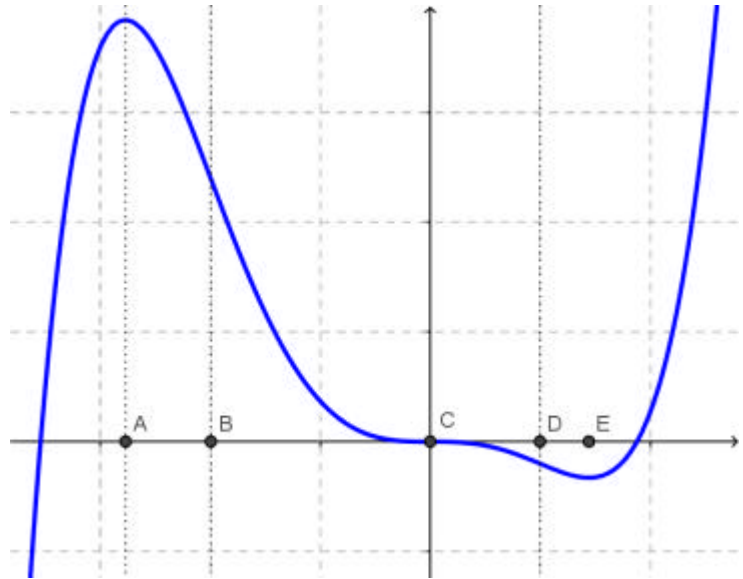
Grup:

Data:

- 2) Una funció $f(x)$ contínua i derivable, té un màxim en $x=A$, un mínim en $x=E$ i tres punts d'inflexió en $x=B$, $x=C$ i $x=D$.

El seu gràfic és el que mostra la figura.

Dibuixa de manera raonada i esquemàticament el gràfic de $f'(x)$ (funció derivada)



[1,5 punts]

②

	NÀX	PI	PI	PI	NIN
x	A	B	C	D	E
$f(x)$			0		
$f'(x)$	↘ 0 ↘	NIN $f'(x)$	NÀX $f'(x)$	NIN $f'(x)$	↘ 0 ↘
$f''(x)$	-	-	0	+	+

$f'(A)=0$
 $f'(E)=0$

$f''(B)=0$
 $f''(C)=0$
 $f''(D)=0$

A la vista de la CURV de $f(x)$ determino signe de $f''(x)$ (ψ)

A la vista del signe de $f''(x) \Rightarrow$ determino creixent de $f'(x)$ (ψ)

$\Rightarrow$ Veig que en hi ha

En $x=B$ un NININ de $f'(x)$
 En $x=C$ — NÀXIN de $f'(x)$
 En $x=D$ — NININ de $f'(x)$

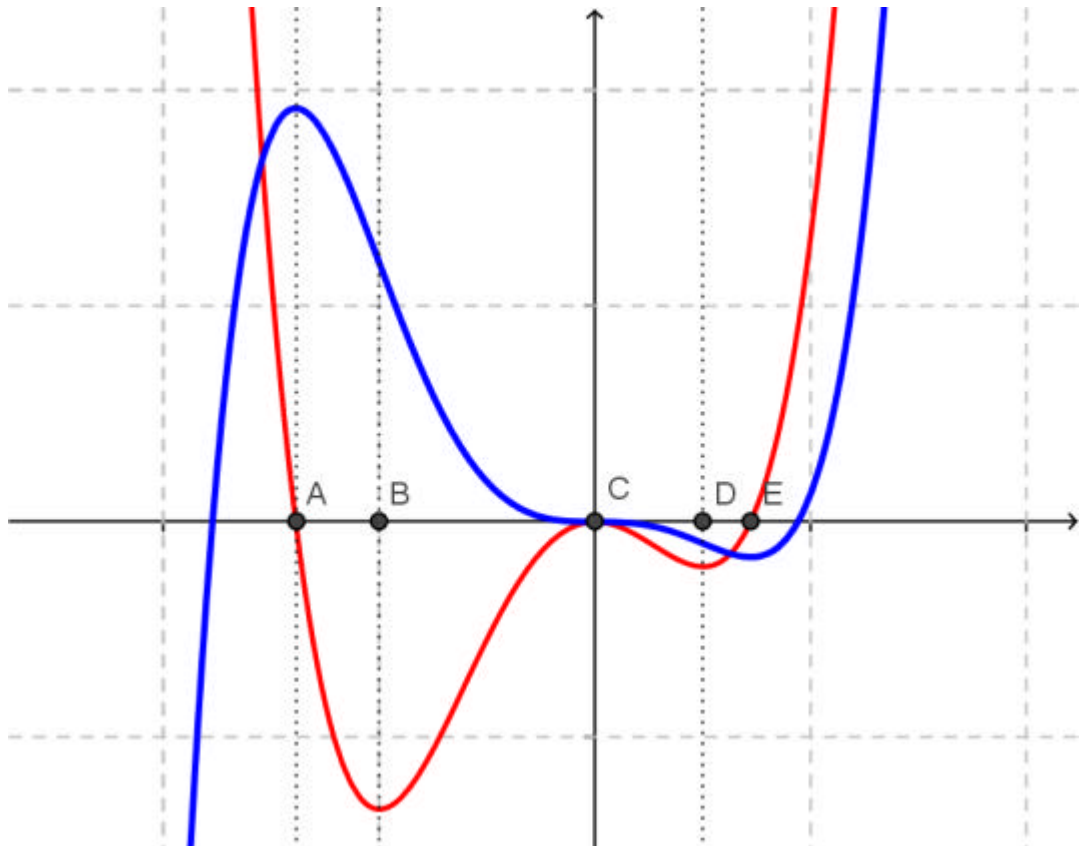
I la gràfica resultant en aproximadament així (la línia de color vermell)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:



3) Donada la funció $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 4)$

- Quin és el seu domini?
- Trobeu les seves asímptotes
- Calculeu i simplifiqueu les dues primeres derivades
- Estudieu el seu creixement, decreixement i l'existència de màxims i mínims.
- Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)
- Amb la informació anterior dibuixeu la seva gràfica

[0,25+0,5+0,5+0,75+0,75+0,75= 3,5 punts]

$y' = 0 \Leftrightarrow e^x (x^2 - 2x) = 0 \begin{cases} e^x = 0 \text{ No!} \\ x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$
 Segue $y' = 2xy (x^2 - 2x)$ $\left. \begin{matrix} e^x > 0 \\ + \cup + \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Determino NoNoT} \Rightarrow$



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

$\Rightarrow$ CREIX $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

DECREIX $\forall x \in (0, 2)$

En $x=0$ $(0, 4)$ té un MÀXIM LOCAL

En $x=2$ $(2, 0)$ té un MÍNIM LOCAL

$$f(2) = e^2(4-8+4) = 0$$

e) $f''(x) = e^x(x^2-2)$

x	$-\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$
y	2,83	1,41
y'		
y''	+ 0 -	0 +

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2-2) = 0$ $\begin{cases} e^x = 0 \text{ No} \\ x^2-2 = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Signes de $f''(x) = \text{Signes}(x^2-2)$
 $e^x > 0$ $\left. \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \right\}$

A la vista del signe de y'' determinem la CURVATURA

$\Rightarrow$ CÒNCAVA $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 CONVEXA $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

PUNTS d'INFLEXIÓ en

$x = -\sqrt{2} \quad f(-\sqrt{2}) \approx 2,83$

$x = \sqrt{2} \quad f(\sqrt{2}) \approx 1,41$



Nom i Cognoms: _____

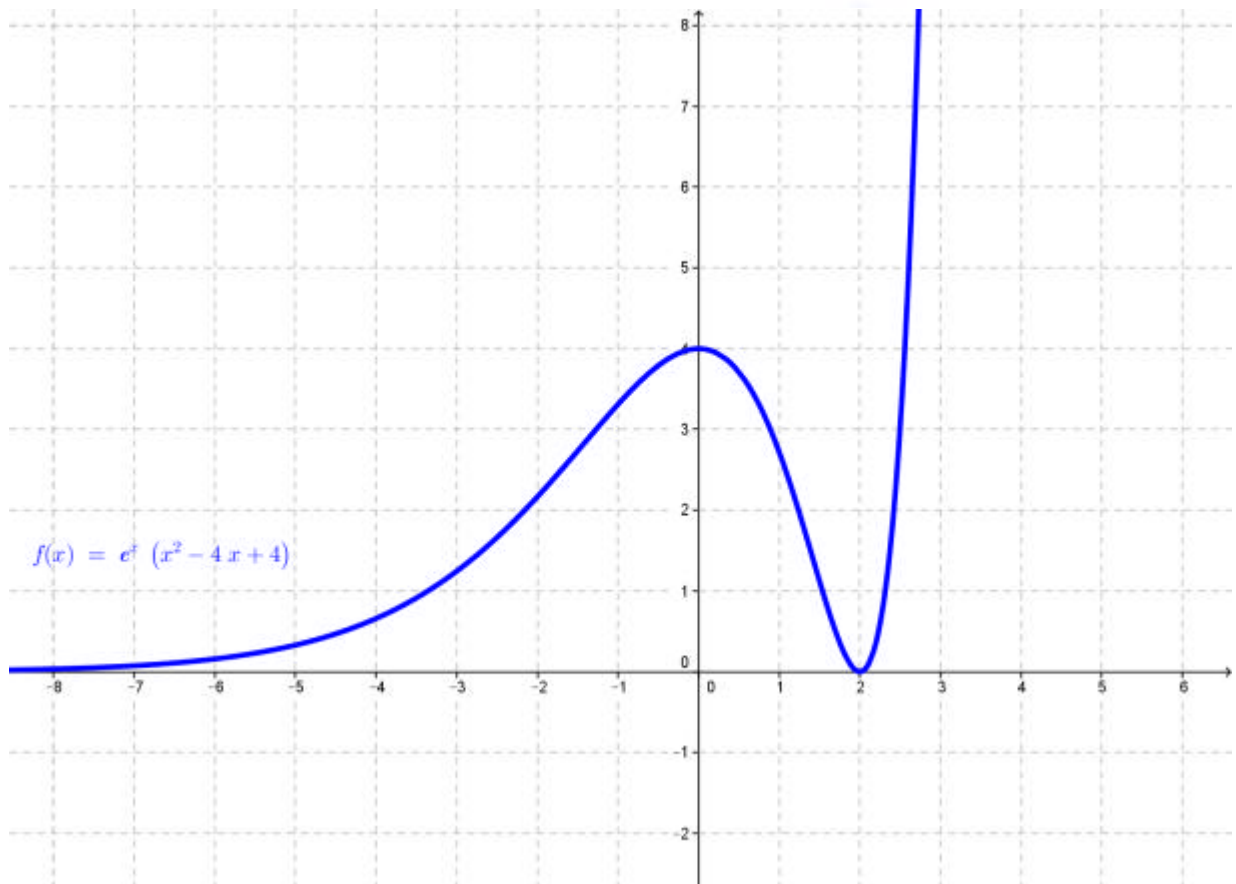
Grup: _____

Data: _____

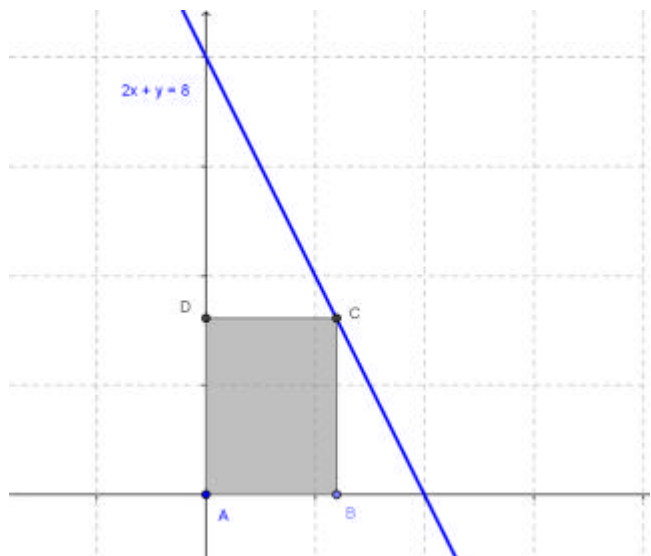
TAULA RESUM 1 GRÀFICA

x	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$	$\frac{PI}{\sqrt{2}}$
y	2,83	4	1,41	0	0	0	0	0	0
y'	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y''	+	0	-	-	-	0	+	+	+

ASINP
y=0
pm
x=-∞



- 4) Dins del triangle limitat pels eixos OX, OY i la recta $2x + y = 8$, s'inscriu un rectangle de vèrtex A(0,0), B(a,0), C(a,b) i D(0,b). Determineu el punt C(a,b) al què correspon el rectangle d'àrea màxima



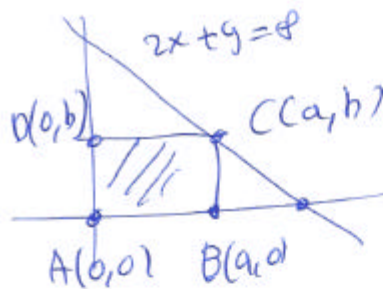


Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

4



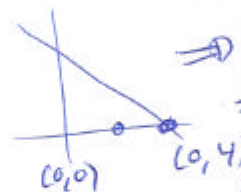
Funció a opt. $f(a, b) = a \cdot b$

Però $C(a, b) \in \text{Reta } 2x + y = 8$ $\left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 8 \\ b = 8 - 2a \end{array} \right.$ $\Rightarrow$

$$f(a) = a(8 - 2a) = 8a - 2a^2$$

DOMINI

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = 8 \\ x = 4 \end{array}$$



$$\text{DOMINI} = [0, 4]$$

$$\Rightarrow 0 \leq a \leq 4$$

ESTUDIEM LA MONOTONIA de $f(a)$

$$f'(a) = 8 - 4a$$

a	0	2	4
f(a)	0	↗	↘ 0
f'(a)	+	0	-

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 8 - 4a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Donat valor a la zona de $f'(a) \Rightarrow f'(0) = 8 > 0$
 $f'(4) = -8 < 0$

$\Rightarrow$ Determinem la MONOTONIA de $f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Per $a = 2$ tindrà un MÀXIM de $f(a)$

$$b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{C(2, 4)}$$