



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Donada la paràbola $y = 3x^2 - 8x$
- Troba un punt en què la tangent a la corba en aquest punt sigui paral·lela a la recta $8X - 2Y + 50 = 0$
 - Dóna les equacions d'aquesta recta tangent i la seva normal (la perpendicular a la tangent) per aquest punt de tangència.
- (1,25 punts)
- 2) Una horta té actualment 24 arbres, que produeixen 600 fruits cada un. Es calcula que, per a cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruits.
- Quin ha de ser el nombre total d'arbres que ha de tenir l'horta per tal que la producció sigui màxima?
 - Quina serà aquesta producció?
- (2 punts)
- 3) D'aquesta funció $y = \sqrt{x^2 - 9}$ calculeu:
- Domini.
 - Asímtotes inclinades.
- (1,5 punts)
- 4) Una empresa d'inversions ha invertit 6 milions d'euros en un fons d'inversió durant 140 dies. La cotització diària d'aquesta inversió ha seguit aquesta funció
- $$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 40x^3 + 1000x^2 + 6000000 \quad x \in [0, 140]$$
- on x representen els dies ($x=0$ és el 1r dia i $x=140$ l'últim) i $f(x)$ el valor diari de la inversió el dia " x ".
- Calculeu quin dia va assolir el valor màxim i quin el valor mínim aquesta inversió al llarg de la seva existència.
 - Quin van ser aquests valors màxim i mínim?
- (1,5 punts)
- 5) Donada la funció $y = x \cdot e^{x+2}$, trobeu:
- El domini, els punts on és continua i on és derivable.
 - Les asímtotes.
 - Els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
 - La seva curvatura (concavitat, convexitat i punts d'inflexió).
 - Feu un dibuix aproximats de la seva gràfica.

(0,5+0,75+1+0,5=3,75 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donada la paràbola $y = 3x^2 - 8x$

- a) Troba un punt en què la tangent a la corba en aquest punt sigui paral·lela a la recta $8X - 2Y + 50 = 0$

El pendent de la recta és 4 (només cal aïllar la y), així doncs solucionant $y'=4$ surt $6x-8=4 \implies x=2 \implies$ així el punt és el $(2, f(2))=(2, -4)$

(0,75 punts)

- b) Dóna les equacions d'aquesta recta tangent i la seva normal (la perpendicular a la tangent) per aquest punt de tangència.

La tangent és $Y+4=4(X-2) \implies Y=4X-12$

I la normal és $Y+4=(-1/4)(X-2) \implies Y=-(1/4)X - 7/2$

(0,5 punts)

2) Una horta té actualment 24 arbres, que produeixen 600 fruits cada un. Es calcula que, per a cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruits. Quin ha de ser el nombre total d'arbres que ha de tenir l'horta per tal que la producció sigui màxima? Quina serà aquesta producció?

Anomenem x el nombre d'arbres addicionals que es planten.

Tenim que la funció a optimitzar és la que ens dóna el nombre de fruits seria:

$$f(x) = (\text{núm arbres}) \cdot (\text{núm de fruits que produeix cada arbre})$$

$$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14400$$

(1 punt)

Busquem x per tal que $f(x)$ sigui màxima:

$$f'(x) = -30x + 240$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -30x + 240 = 0 \rightarrow x = \frac{240}{30} = 8 \rightarrow x = 8$$

Vegem què és un màxim:

$$f''(x) = -30; f''(8) = -30 < 0 \rightarrow \text{en } x = 8 \text{ hi ha màxim. (Com que } f(x) \text{ correspon a una paràbola invertida, en } x = 8 \text{ està el màxim absolut.)}$$

(0,75 punts)

Per tant, s'han de plantar 8 arbres addicionals. Així, hi haurà un total de $24 + 8 = 32$ arbres, que produiran 15360 fruits.

(0,25 punts)

3) D'aquesta funció $y = \sqrt{x^2 - 9}$ calculeu:

- a) Domini.

$$x^2 - 9 \geq 0 \text{ i la solució és } x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

(0,5 punts)

- b) Asímtotes inclinades.

Per $x \rightarrow +\infty$ l'asímtota és $Y = X$

la $m=1$ surt ràpid i per obtenir la $n=0$ cal multiplicar i dividir pel conjugat

Per $x \rightarrow -\infty$ l'asímtota és $Y = -X$

Ídem que abans $m=-1$ i $n=0$

(1 punt)

4) Una empresa d'inversions ha invertit 6 milions d'euros en un fons d'inversió durant 140 dies. La cotització diària d'aquesta inversió ha seguit aquesta funció

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 40x^3 + 1000x^2 + 6000000 \quad x \in [0, 140]$$

on x representen els dies ($x=0$ és el 1r dia i $x=140$ l'últim) i $f(x)$ el valor diari de la inversió el dia " x ".

- Calculeu quin dia va assolir el valor màxim i quin el valor mínim aquesta inversió al llarg de la seva existència.
- Quin van ser aquests valors màxim i mínim?

Els candidats a extrems absoluts són els extrems de l'interval del domini i els punts on $f'(x)=0$.

Així doncs tenim els candidats: $x=0, 20, 100$ i 140

(1 punt)

Avaluant aquests candidats tenim que:

$$f(0) = 6.000.000$$

$$f(20) = 6.120.000$$

$$f(100) = 1.000.000$$

$$f(140) = 11.880.000$$

(0,25 punts)

Per tant podem deduir que:

- el mínim va ser el dia 100 que la inversió es valorava en 1.000.000 €
- el màxim va ser el dia 140 que la inversió es valorava en 11.880.000 €

(0,25 punts)

5) Donada la funció $y = x \cdot e^{x+2}$, trobeu:

- El domini, els punts on és contínua i on és derivable.
- Les asímptotes.
- Els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
- La seva curvatura (concavitat, convexitat i punts d'inflexió).
- Feu un dibuix aproximats de la seva gràfica.

- Domini = $\mathbb{R}$ on és contínua i derivable

- Asímtotes:

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x e^{-x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{x-2}} = 0$$

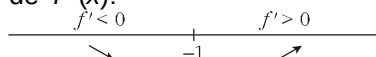
$y = 0$ és asímtota horitzontal si $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Branca parabòlica}$$

- Punts singulars. Creixement i decreixement:

$$f'(x) = e^{x+2} + x e^{x+2} = (1+x) e^{x+2} \quad f'(x) = 0 \rightarrow 1+x=0 \rightarrow x=-1$$

Signe de $f'(x)$:



$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -1)$; és creixent en $(-1, +\infty)$. Té un mínim en $(-1, -e)$.

- Per a la curvatura estudiem el signe de la $f''(x) = e^{x+2} + (1+x)e^{x+2} = (2+x)e^{x+2}$

$$\rightarrow f''(x)=0 \rightarrow x=-2$$

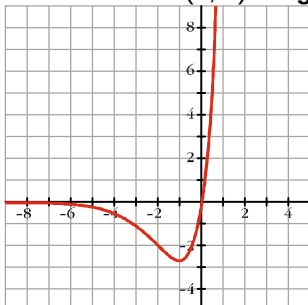
i els signes de $f''(x)$ resulten clars amb la qual cosa es té:

Convexa a $(-\infty, -2)$

Punt d'inflexió a $x = -2$

Còncava a $(-2, +\infty)$

- Talla els eixos en $(0, 0)$ i la gràfica



(0,5+0,75+1+1+0,5=3,75 punts)