Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Aplicacions de les derivades

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

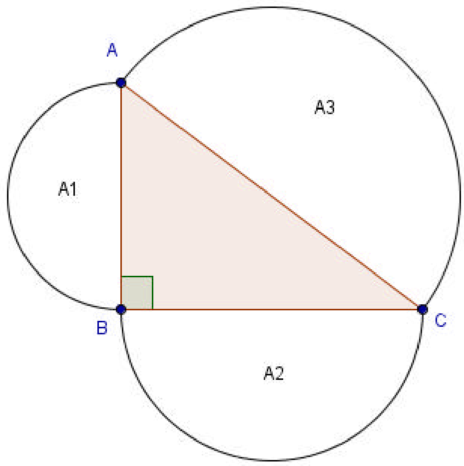
1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \to +\infty} x^{5/x} =$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} + 3x - 1}{-5x} =$

(2 punts)

2) Vull fer tres jardins semicirculars (A1, A2 i A3) que es recolzen sobre els costats d'un triangle (ABC) que serà un llac, tal com es mostra a la figura adjunta.



La suma dels dos cates del triangle ha de ser de 10 metres i vull que el perímetre exterior (les semicircumferències) dels tres jardins sigui mínim .

a) Quines són les dimensions que ha de tenir el triangle central?
b) Quin és el perímetre exterior dels tres jardins?
c) Quina és la superfície del llac?

(1,5+0,25·2=2 punts)

3) D'aquesta funció $y = \sqrt{x^2 - x}$ calculeu:

a) Domini.
b) Asímptotes inclinades.

(0,5+1=1,5 punts)

4) Donada la funció $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) El domini, els punts on és continua i on és derivable.
b) Comproveu si la funció té o no una simetria parella o senar
c) Calculeu i simplifiqueu al màxim les dues primeres derivades.
d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
e) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitat i punts d'inflexió)
f) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

(0,25+0,5+1+1+1+0,75=4,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{5/x} = L$

És una indeterminació ∞^0. Per tant calcularem primer el logaritme neperià del límit

$$\ln(L)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty} x^{5/x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x^{5/x})\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}\cdot\ln(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5\cdot\ln(x)}{x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

Per resoldre aquesta indeterminació apliquem l'Hôpital i obtenim:

$$\ln(L)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5\cdot\ln(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5\cdot\frac{1}{x}}{1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(5\cdot\frac{1}{x}\right)=0^+$$ i així doncs $L=e^0=1$

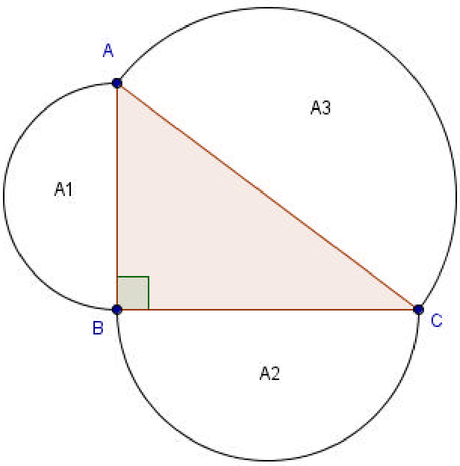
b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+3x-1}{-5x}=$

És un indeterminació $\frac{0}{0}$ Per resoldre aquesta indeterminació apliquem l'Hôpital i obtenim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+3x-1}{-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+3}{-5}=\frac{2e^0+3}{-5}=\frac{2\cdot1+3}{-5}=\frac{5}{-5}=-1$$

(2 punts)

2) Vull fer tres jardins semicirculars (A1, A2 i A3) que es recolzen sobre els costats d'un triangle (ABC) que serà un llac, tal com es mostra a la figura adjunta.



La suma dels dos cates del triangle ha de ser de 10 metres i vull que el perímetre exterior (les semicircumferències) dels tres jardins sigui mínim .

a) Quines són les dimensions que ha de tenir el triangle central?
b) Quin és el perímetre exterior dels tres jardins?
c) Quina és la superfície del llac?

(1,5+0,25·2=2 punts)

Posem nom als catets si AB=X aleshores BC=10–X

La funció a optimitzar és

$$f(x)=p\left(\frac{x}{2}+\frac{(10-x)}{2}+\frac{\sqrt{x^2+(10-x)^2}}{2}\right)=\frac{p}{2}\left(10+\sqrt{2x^2-20x+100}\right)$$

El domini = (0,10)

Ara obtenim els candidats a màxims i mínims que són els x tal que f ' (x)=0

$$f'(x)=p\frac{x-5}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

$$f''(x)=\frac{25p}{\left(x^2-10x+50\right)\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

f ' (x) = 0 ⇔ X=5

Per comprovar que efectivament per aquest valor tenim un mínim tenim dos opcions. Mirar el creixement a dreta i esquerra del candidat o mirar el signe de f '' (5)

- f '' (5) >0 per tant en X=5 la funció té un mínim.
- Mirant el creixement també observem que per X=5 la funció té un mínim.

x		5	
f (x)	↘↘↘↘↘↘		↗↗↗↗↗↗
f ' (x)	−−−−−	0	+++++++

Solucions:

a) Les dimensions del triangle central són de 5 m cadascun dels catets i de $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ m la hipotenusa = 7,07 m la hipotenusa

b) El perímetre exterior dels 3 jardins és f(5)= $5p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$m = 26.815 m.

c) La superfície del llac és de $\frac{5\cdot 5}{2}=\frac{25}{2}=12,5m^2$

3) D'aquesta funció $y=\sqrt{x^2-x}$ calculeu:

a) Domini.

Cal eliminar els valors de x on $x^2-x\le 0$.

Així doncs el domini = (– ∞ ,0] ∪ [1,+ ∞)

b) Asímptotes inclinades.

b.1) Per $x\to+\infty$ són rectes y=mx+n on

m= $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1$ per tant si que existeix i

n= $\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-x=(\infty-\infty)$ i solucionem la indeterminació multiplicant i dividint pel conjugat

$$n=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\left(\sqrt{x^2}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=\frac{-1}{2}$$

Així dons Y = X –1/2 és asímptota per $x\to+\infty$

b.2) Per $x \to -\infty$ són rectes y=mx+n on

m= $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to+\infty} -1 = -1$ per tant si que existeix i n= $\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x} + x = (\infty - \infty)$ ara passem el límit a $x \to +\infty$ i solucionem la indeterminació multiplicant i dividint pel conjugat

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\left(\sqrt{x^2}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Així dons Y = – X + 1/2 és asímpota per $x \to -\infty$

(0,5+1=1,5 punts)

4) Donada la funció $y = \frac{x}{x^2+1}$

a) El domini, els punts on és continua i on és derivable.
Com el denominador no s'anul·la el domini= R, on també és contínua i derivable

b) Comproveu si la funció té o no una simetria parella o senar
Efectivament és senar ja que f(x)= –f(–x)

c) Calculeu i simplifiqueu al màxim les dues primeres derivades.
Una vegada simplificades són $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ i $f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

x		–1		1	
f (x)	↘↘↘↘↘↘	–1/2	↗↗↗↗↗↗	1/2	↘↘↘↘↘↘
f ' (x)	– – – – – –	0	+ + + + + + +	0	– – – – –

Per tant:
- Decreix en (– ∞ ,–1) ∪ (1,+ ∞)
- Creix en (–1,1)
- Té un mínim local en X= –1 és a dir en (–1,f(–1))= (–1, –1/2)
- Té un màxim local X= 1 és a dir en (1,f(1))= (1, 1/2)

e) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitat i punts d'inflexió)

x		$-\sqrt{3}$		-1		**0**		1		$\sqrt{3}$	
f (x)	↘↘	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	↘↘	$-1/2$	↗↗		↗↗	1/2	↘↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘↘
f ' (x)	– –		– –	0	+ +		+ +	0	– –		– –
f " (x)	– –	**0**	+ +	+	+ +	**0**	– –	–	– –	**0**	+ +

Per tant:

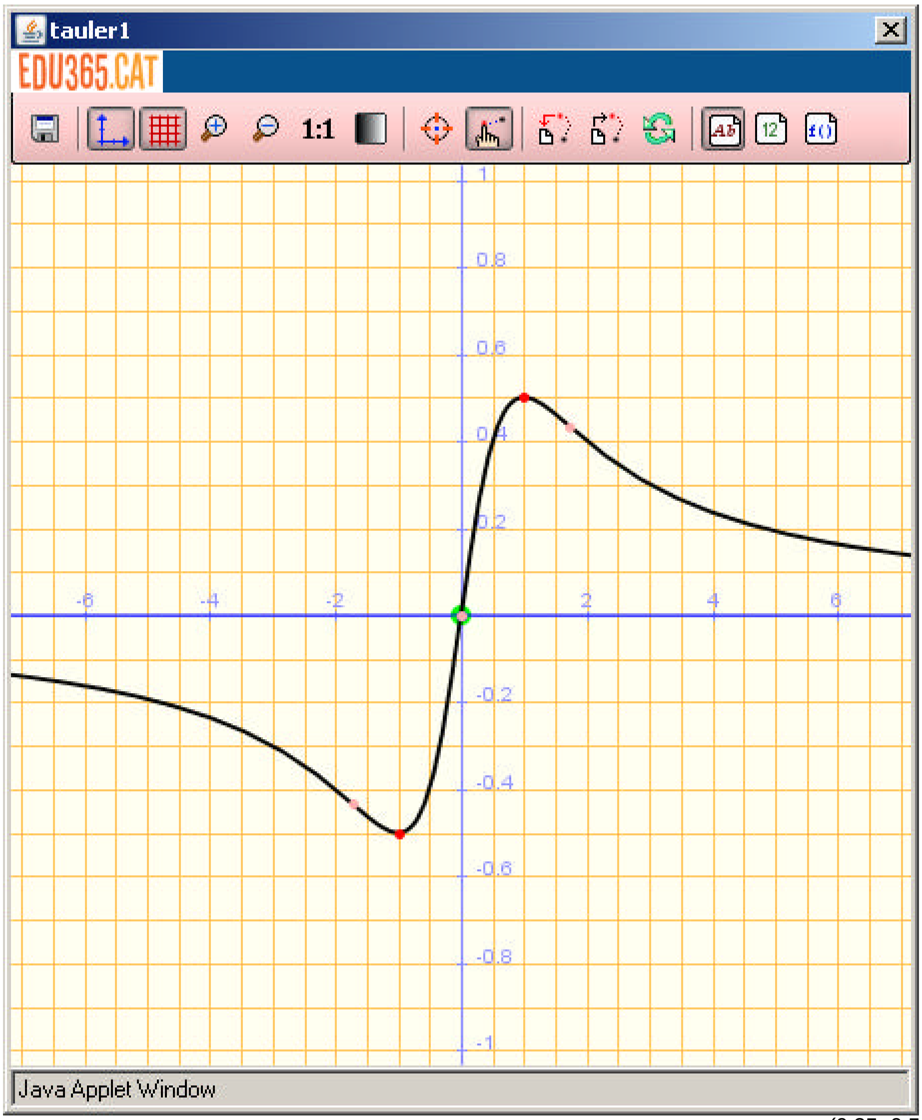
- Convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
- Còncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Punts d'inflexió en X=$-\sqrt{3}$, X=0 i X=$\sqrt{3}$, és a dir en els punts:

$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, (0,0) i $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$

f) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

Si es vol es pot veure que Y=0 és asímptota horitzontal ja que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$



(0,25+0,5+1+1+1+0,75=4,5 punts)