Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu a i b per tal que la funció f(x) sigui contínua

$$f(x)=\begin{cases} = x-a & si \quad x\le -2 \\ = ax+b & si \quad -2<x<0 \\ = x^2+3x+1 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Per als valors de **a** i **b** obtinguts, estudia la derivabilitat de f(x).

(2 punts)

2) Deriveu i simplifiqueu la màxim: $y=\ln\left(\sqrt{\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}}\right)$

(1,5 punts)

3) Deriveu les funcions següents:

a) $y=\left(\cos(3x)\right)^{\ln x}$

b) $y=14^p-\left(3x\right)^5+6\sqrt[3]{2x}$

(1,5 punts)

4) Donada la gràfica de la funció $f(x)=x^3-9x$

a) Trobeu les equacions de les rectes tangent i normal a la gràfica de en el punt d'abscisses x=1

b) En quins punts la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses (OX)?

(1,5 punts)

5) Donada la funció $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

a) Estudieu el seu creixement, decreixement, i l'existència de màxims i mínims.

b) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)

(2 punts)

6) Una caldera amb forma de prisma recte de base quadrada té un volum de 768 m^3. Sabem que la pèrdua de calor a través de les parets laterals és de 100 unitats per metre quadrat, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per metre quadrat. La pèrdua pel sòl és tan petita que podem considerar-la nul·la. Calculeu les dimensions de la caldera perquè la pèrdua de calor sigui mínima.

(1,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu a i b per tal que la funció f(x) sigui contínua

$$f(x)=\begin{cases} = x-a & si \quad x\le -2 \\ = ax+b & si \quad -2<x<0 \\ = x^2+3x+1 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Per als valors de **a** i **b** obtinguts, estudia la derivabilitat de f(x).

(2 punts)

Com els valors de cada tros són funcions derivables, sabem que la funció és contínua i derivable en els intervals oberts de la definició de cada tros, és a dir en tots els valors x de $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.
I fins i tot podem dir que

$$f\,'(x)=\begin{cases} =1 & si \quad x<-2 \\ =a & si \quad -2<x<0 \\ =2x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$$

Ara si imposem que sigui contínua en x = –2, vol dir que aquests tres valors han de ser iguals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} x-a=-2-a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} ax+b=-2a+b \\ f(-2)=-2-a \end{array}\right\}\Rightarrow -2-a=-2a+b\Rightarrow a-b=2$$

Ara si imposem que sigui contínua en x = 0, vol dir que aquests tres valors han de ser iguals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} ax+b=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+3x+1=1 \\ f(0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

Així doncs per a que la funció sigui contínua cal que b=1 i a=2+b=2+1=3

Ara estudiem si per aquests valors la funció també es derivable:

$f\,'(-2^-)=1,\ f\,'(-2^+)=a=3$ i com són diferents $\Rightarrow$ f(x) no és derivable en x = –2

$f\,'(0^-)=a=3,\ f\,'(0^+)=2\cdot 0+3=3$ i com són iguals $\Rightarrow$ f(x) és derivable en x = 0 i podem dir que $f\,'(0)=3$

Conclusió per a=3 i b=1 la funció és derivable en $R-\{-2\}$

2) Deriveu i simplifiqueu la màxim: $y=\ln\left(\sqrt{\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}}\right)$

(1,5 punts)

Apliquem les propietats dels logaritmes abans de derivar per expressar la funció d'una altra forma on sigui més fàcil derivar-la

$$y=\ln\left(\sqrt{\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\sin(x)+\cos(x)\right)-\ln(\sin(x)-\cos(x))\right)$$

I ara derivem

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}-\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\left(\cos(x)-\sin(x)\right)^2-\left(\cos(x)+\sin(x)\right)^2}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos^2(x)+\cancel{2\cos(x)\sin(x)}-\sin^2(x)-\cos^2(x)-\cancel{2\cos(x)\sin(x)}-\sin^2(x)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cancel{2}\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}=\frac{-1}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}$$

3) Deriveu les funcions següents:

a) $y=\left(\cos(3x)\right)^{\ln x}$

Hem de fer derivació logarítmica. Apliquem logaritme neperià als dos membres i utilitzem les propietats dels logaritmes.

$\ln y=\ln\left[\left(\cos(3x)\right)^{\ln x}\right]\Rightarrow \ln y=\ln(x)\cdot\ln\left[\cos(3x)\right]$ i ara derivant els dos membres tenim

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln[\cos(3x)]}{x}+\frac{\ln(x)\cdot(-\sin(3x))\cdot 3}{\cos(3x)}\Rightarrow y'=\left[\frac{\ln\left(\cos(3x)\right)}{x}-\frac{\ln(x)\cdot\sin(3x)\cdot 3}{\cos(3x)}\right]\cdot y\Rightarrow$$

$$y'=\left[\frac{\ln\left(\cos(3x)\right)}{x}-\frac{\ln(x)\cdot\sin(3x)\cdot 3}{\cos(3x)}\right]\left(\cos(3x)\right)^{\ln x}$$

b) $y = 14^p - (3x)^5 + 6\sqrt[3]{2x}$

Aquesta és molt més fàcil.

$$y' = 0 - 5(3x)^4 \cdot 3 + 6\frac{1}{3}(2x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2 = -15(3x)^4 + 4(2x)^{\frac{-2}{3}} = -15(3x)^4 + \frac{4}{\sqrt[3]{(2x)^2}}$$

(1,5 punts)

4) Donada la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 9x$

a) Trobeu les equacions de les rectes tangent i normal a la gràfica de en el punt d'abscisses x=1

a) La recta tangent en el punt (1,f(1)) és una recta Y= m X + n que passa pel punt (1,– 8) i té pendent m= $f'(1)$

I com $f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 9 = 3 - 9 = -6$

així doncs la recta és Y= – 6 x + n i ara imposant que passa per (1, – 8) tenim que – 8 = – 6 + n $\Rightarrow$ n = – 2

I la recta tangent buscada és Y = – 6 X – 2

La recta normal passa pel mateix punt però té pendent $= \frac{-1}{f'(1)} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$

així és la recta $y = \frac{1}{6}x + n$ que passa pel punt (1, – 8), per tant

$-8 = \frac{1}{6}1 + n \Rightarrow -8 - \frac{1}{6} = n \Rightarrow n = \frac{-48-1}{6} = \frac{-49}{6} \Rightarrow$ la recta normal és

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{49}{6}$$

b) En quins punts la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses (OX)?

L'eix OX (y=0) és una recta de pendent zero. Així doncs la pregunta és equivalent a descobrir en quins x es verifica que **f '(x)=0**

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Solució hi ha tangent paral·lela a l'eix OX (y=0) en els punts:

(3, f(3)) **i en** (–3,f(–3)) i calculant les segones coordenades dels punts

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^3 - 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \text{ i}$$

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

tenim que hi ha tangent paral·lela a l'eix OX (y=0) en els punts:

$(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ **i en** $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

(1,5 punts)

5) Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

a) Estudieu el seu creixement, decreixement, i l'existència de màxims i mínims.
b) Estudieu la seva curvatura (concavitat, convexitats i punts d'inflexió)

(2 punts)

El domini de la funció és $R-\{-1,1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Calculem primer les dues primeres derivades i les simplificarem al màxim.

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{\cancel{2x^3}-2x-\cancel{2x^3}}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\left(x^2-1\right)^{\cancel{2}}+2x\cdot 2\cdot\cancel{\left(x^2-1\right)}\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^2+2+8x^2}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Ara estudiant els signes de la y ' trobarem els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

x		**–1**		**0**		**1**	
f (x)	↗↗↗↗↗	∄	↗↗↗↗↗↗	0	↘↘↘↘↘↘	∄	↘↘↘↘↘↘
f ' (x)	+ + + + + +	∄	+ + + + + + +	**0**	– – – – –	∄	– – – – –

Per tant:

- Creix en (– ∞ ,–1) ∪ (–1,0)
- Decreix en (0,1) ∪ (1,+ ∞)
- Té un màxim local X= 0 és a dir en (0,f(0))= (0, 0)

Ara estudiant els signes de la y'' trobarem els seus punts d'inflexió i la seva curvatura.

Com la 2a derivada no s'anul·la en cap nombre real, només cal que mirem el signe de y '' en les tres zones (x<–1,–1<x<1 i x>1). I obtenim:

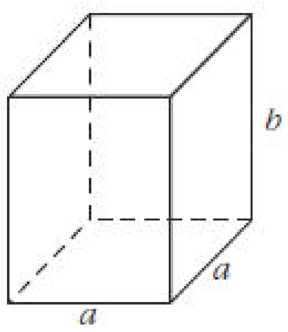
x		**–1**		**0**		**1**	
f (x)	↗↗↗↗↗	∄	↗↗↗↗↗↗	0	↘↘↘↘↘↘	∄	↘↘↘↘↘↘
f ' (x)	+ + + + + +	∄	+ + + + + + +	**0**	– – – – –	∄	– – – – –
f '' (x)	+ + + + + +	∄	– – – – — – – – — – – – — – – –			∄	+ + + + + +

Per tant:

- Convexa en (–1,1)
- Còncava en (– ∞ ,–1) ∪ (1,+ ∞)
- Punts d'inflexió no hi ha cap.

6) Una caldera amb forma de prisma recte de base quadrada té un volum de 768 m^3. Sabem que la pèrdua de calor a través de les parets laterals és de 100 unitats per metre quadrat, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per metre quadrat. La pèrdua pel sòl és tan petita que podem considerar-la nul·la. Calculeu les dimensions de la caldera perquè la pèrdua de calor sigui mínima.

(1,5 punts)



a = costat de la base en metres

b =alçada en metres

Funció a optimitzar f(a, b) = 400 *ab* + 300 a^2

però com sabem que Volum = 768 m^3

$a^2b = 768, \Rightarrow b = \dfrac{768}{a^2}$ i així doncs la funció d'un única variable és

$$f(a) = 400 \cdot a \cdot \frac{768}{a^2} + 300\,a^2 = \frac{307200}{a} + 300\,a^2$$

El domini d'aquesta funció és $(0, +\infty)$

Busquem els candidats a extrems igualant la derivada a zero:

$$f'(a) = \frac{-307200}{a^2} + 600\,a = 0 \Leftrightarrow 6\cancel{00}\,a^3 = 3072\cancel{00} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3072}{6}} = \sqrt[3]{512} = 8\ m$$

Ara cal assegurar-nos que aquest candidat és efectivament un mínim. Per fer-ho estudiem el creixement i decreixement de la funció al seu voltant:

Calculem el signe de f ' (x) en les dues zones i a la vista del resultat determinem el creixement i decreixement de la funció:

$$f'(1) = \frac{-307200}{1^2} + 600 < 0 \qquad f'(10) = \frac{-307200}{10^2} + 600 \cdot 10 = -307 + 6000 > 0$$

x	x<0	0		8	
f (x)	∄	∄	↘↘↘↘↘↘		↗↗↗↗↗↗
f ' (x)	∄	∄	– – – – – –	0	+ + + + + +

Així doncs podem assegurar que per a=8 tenim un mínim absolut de la funció

I per trobar el valor de l'altra variable substituïm:

$b = \dfrac{768}{a^2}$ com a=8 tenim que $b = \dfrac{768}{8^2} = \dfrac{768}{64} = 12$

Solució: Les dimensions demanades del dipòsit són *a* = 8 m de costat de la base i *b* = 12 m d'alçada.