

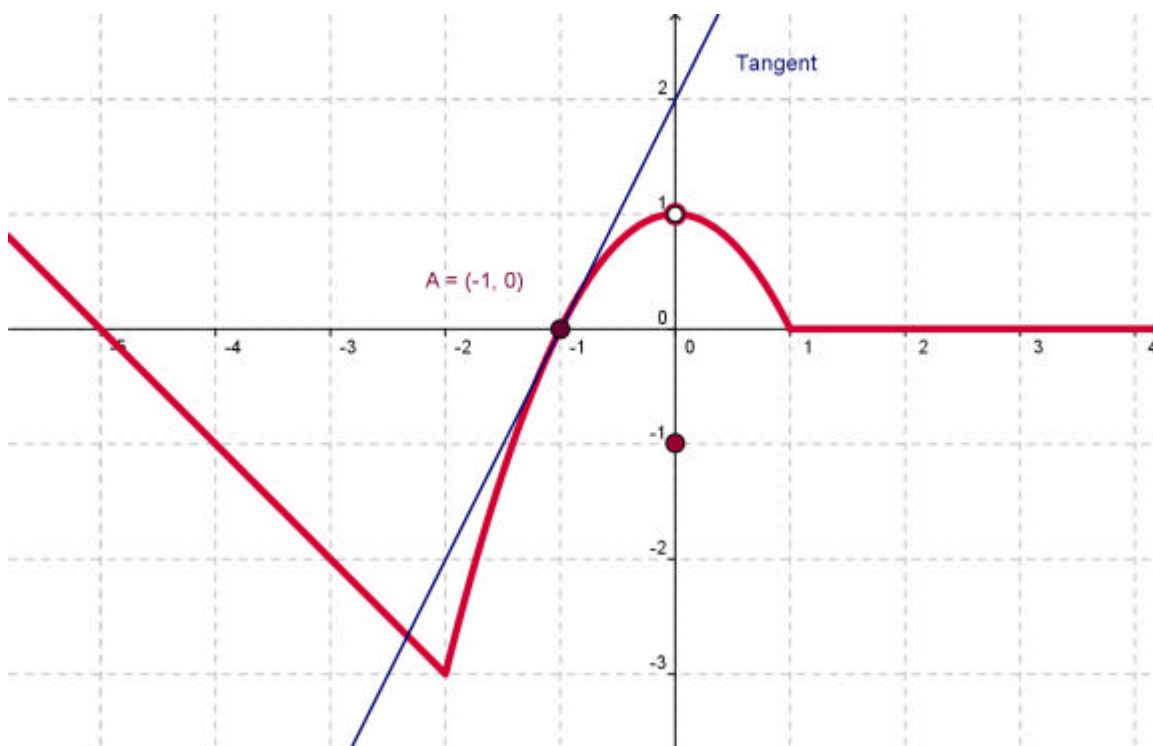


**Nom i Cognoms:**

**Grup:**

**Data:**

1) Donada la gràfica de la funció  $y=f(x)$  i la de la tangent a la corba en el punt A



a) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció  $y=f(x)$

b) Calculeu els valors de:

$$f'(-4)= \quad f'(-1)= \quad f'(0^-)= \quad f'(0^+)= \quad f'(0)=$$

c) En quins valors  $f'(x) = 0$ ?

(1+0,75+0,25=2 punts)

2) a) Deduïu la fórmula de derivació de la funció inversa d'una altra funció.

b) Apliqueu-la per trobar la derivada de la funció  $f(x) = \arcsin(x)$

(0,25+0,75=1 punt)

3) Discutiu la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció segons els valors dels paràmetres **a** i **b**.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(2 punts)

4) Deriveu i simplifiqueu la màxim:  $y = \ln \left( \sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+2)^3}} \right)$

(1,5 punts)

5) Deriveu les funcions següents:

a)  $y = \frac{\sin(2x)}{e^{2x}}$

b)  $y = (\arctg x)^{\ln x}$

(0,5+1=1,5 punts)

6) Donada l'el·lipse  $3x^2 + 12y^2 = 39$ . Trobeu

a) Els punts de l'el·lipse d'abscisses  $x=3$ .

b) Les equacions de les rectes tangent i normal a l'el·lipse en el punt (3,1).

(0,5+1,5=2 punts)

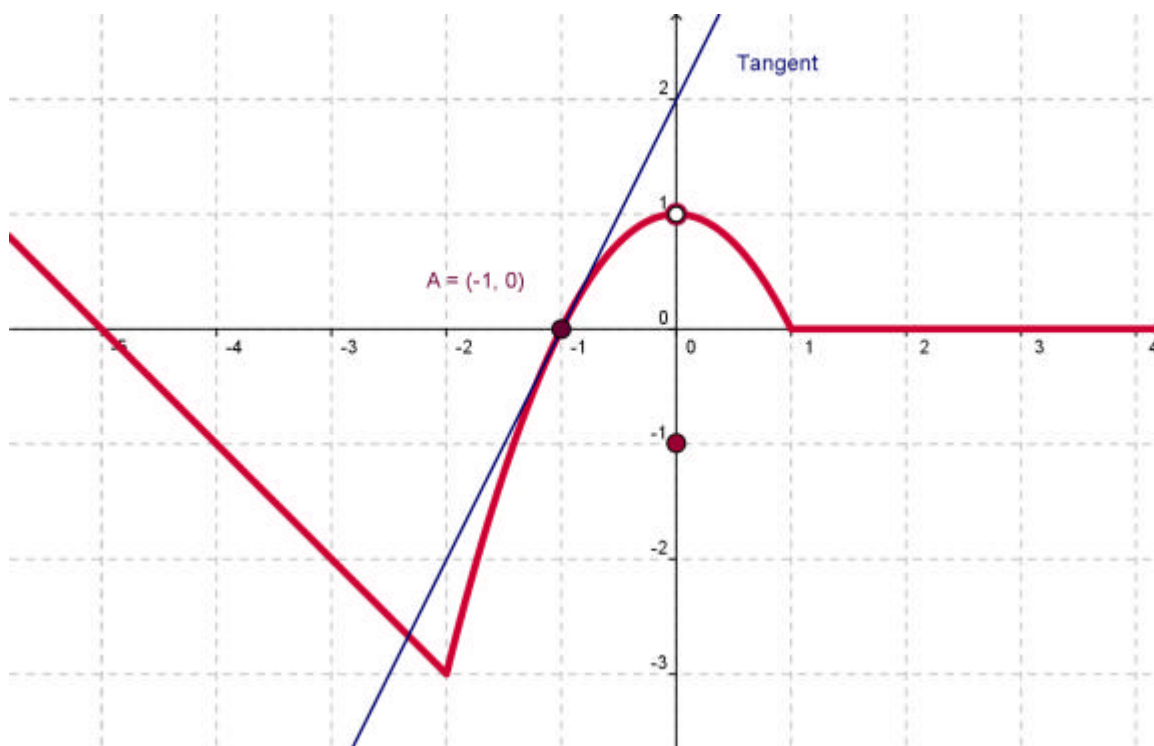


Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donada la gràfica de la funció  $y=f(x)$  i la de la tangent a la corba en el punt A



a) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció  $y=f(x)$

b) Calculeu els valors de:

$$f'(-4)= \quad f'(-1)= \quad f'(0^-)= \quad f'(0^+)= \quad f'(0)=$$

c) En quins valors  $f'(x) = 0$ ?

(1+0,75+0,25=2 punts)

DONEM  $f(x) = \mathbb{R}$   
 ① a)  $f(x)$  és CONTÍNUA  $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$   
 $f(x)$  és DERIVABLE  $\forall x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$   
 $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$   
 b)  $f'(-4) = -1$  ;  $f'(-1) = \frac{2}{1} = 2$  ;  $f'(0^-) = 0$  ;  $f'(0^+) = 0$   
 $\nexists f'(0)$  ja que no és CONTÍNUA en  $x=0$   
 c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

- 2) a) Deduïu la fórmula de derivació de la funció inversa d'una altra funció.  
 b) Apliqueu-la per trobar la derivada de la funció  $f(x) = \arcsin(x)$

(0,25+0,75=1 punt)

$$\textcircled{2} \quad a) \quad x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{f} f(f^{-1}(x)) = x$$

$f \circ f^{-1}$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{i ara derivem}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

$$b) \quad \text{Si } f(x) = \sin x \quad f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- 3) Discutiu la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció segons els valors dels paràmetres **a** i **b**.

$$f(x) = \begin{cases} = -2x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ = e^{2x} + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(2 punts)

③ DONANT  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x)$  és clarament contínua i derivable en els  
 $x \neq 0$   $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  i a més

$$f'(x) = \begin{cases} = -2 & \text{si } x < 0 \\ = 2e^{2x} + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ara veiem si és

a) CONT en  $x=0$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -2x + 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} + ax + b = e^0 + b = 1 + b$$

$$f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ és CONT en } x=0 \Leftrightarrow 5 = 1+b \Leftrightarrow b=4$$

b) Derivable en  $x=0$   $\Leftrightarrow$  és CONTINUA en  $x=0$   
 i a més  $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ \text{a més} \end{cases} \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -2 = -2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^{2x} + a = 2+a \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ -2 = 2+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=-4 \end{cases}$$

CONCLUSIÓ

$b \neq 4$   $\Leftrightarrow f(x)$  és CONT i DER en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  I en  $x=0$  DISC de SACT  
 $\angle b=4$   $\begin{cases} a=-4 \end{cases}$   $f(x)$  CONT i derivable en  $\mathbb{R}$   
 $\angle b=4$   $\begin{cases} a \neq -4 \end{cases}$   $f(x)$  CONT en  $\mathbb{R}$  i Derivable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

4) Deriveu i simplifiqueu la màxim:  $y = \ln \left( \sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+2)^3}} \right)$

(1,5 punts)

④  $y = \ln \left( \left( \frac{x-1}{(x+2)^3} \right)^{1/5} \right)$  abans de derivar  
aneglo l'expressió de  $f(x)$

$$y = \frac{1}{5} \ln \left( \frac{x-1}{(x+2)^3} \right) = \frac{1}{5} \left[ \ln(x-1) - \ln((x+2)^3) \right] =$$

$$y = \frac{1}{5} \left[ \ln(x-1) - 3 \ln(x+2) \right]$$

Ara derivem

$$y' = \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{x-1} - 3 \frac{1}{x+2} \right]$$

$$y' = \frac{1}{5} \frac{x+2 - 3(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{1}{5} \frac{(-2x+5)}{(x-1)(x+2)}$$

5) Deriveu les funcions següents:

a)  $y = \frac{\sin(2x)}{e^{2x}}$

b)  $y = (\arctg x)^{\ln x}$

(0,5+1=1,5 punts)

a)  $y = \frac{\sin(2x)}{e^{2x}}$

$$y' = \frac{\cos(2x) \cdot 2 \cdot e^{2x} - \sin(2x) e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2}$$

$$y' = \frac{2e^{2x} (\cos 2x - \sin 2x)}{(e^{2x})^2} = \frac{2(\cos 2x - \sin 2x)}{e^{2x}}$$



b) Fem derivada logarítmica  $y = (\arctan x)^{\ln x}$   
 $\ln y = \ln (\arctan x)^{\ln x}$   
 $\ln y = \ln x \ln (\arctan x)$   
 Ara derivo  
 $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} \ln (\arctan x) + \frac{\ln x}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$   
 $y' = \left[ \frac{\ln (\arctan x)}{x} + \frac{\ln x}{\arctan x (1+x^2)} \right] (\arctan x)^{\ln x}$

6) Donada l'el·lipse  $3x^2 + 12y^2 = 39$ . Trobeu

c) Els punts de l'el·lipse d'abscisses  $x=3$ .

6 a)  $\left. \begin{array}{l} 3x^2 + 12y^2 = 39 \\ x=3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 9 + 12y^2 = 39 \\ 12y^2 = 39 - 27 \\ 12y^2 = 12 \\ y^2 = 1 \\ y = \pm 1 \end{array}$

$\Rightarrow$  hi ha 2 PTS solució  $(3, 1)$  i el  $(3, -1)$

d) Les equacions de les rectes tangent i normal a l'el·lipse en el punt  $(3, 1)$ .

b) Cal trobar  $y'$  en el PT  $(3, 1)$

Derivo implícitament

$6x + 24y y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-6x}{24y} \Rightarrow y' = \frac{-x}{4y}$

$\Rightarrow y' \text{ (en el PT } (3, 1)) = \frac{-3}{4}$  que és el pendent de la recta tangent en  $(3, 1)$

LA TANGENT en  $(3, 1)$

$y = \frac{-3}{4}x + m \Rightarrow 1 = \frac{-9}{4} + m \Rightarrow m = \frac{13}{4}$   
 Per a  $(3, 1)$   $1 + \frac{9}{4} = m$

$y = \frac{-3}{4}x + \frac{13}{4}$

LA NORMAL en  $(3, 1)$  té  $m = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3}x + m \Rightarrow 1 = \frac{4}{3} \cdot 3 + m \Rightarrow m = -3 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 3$