

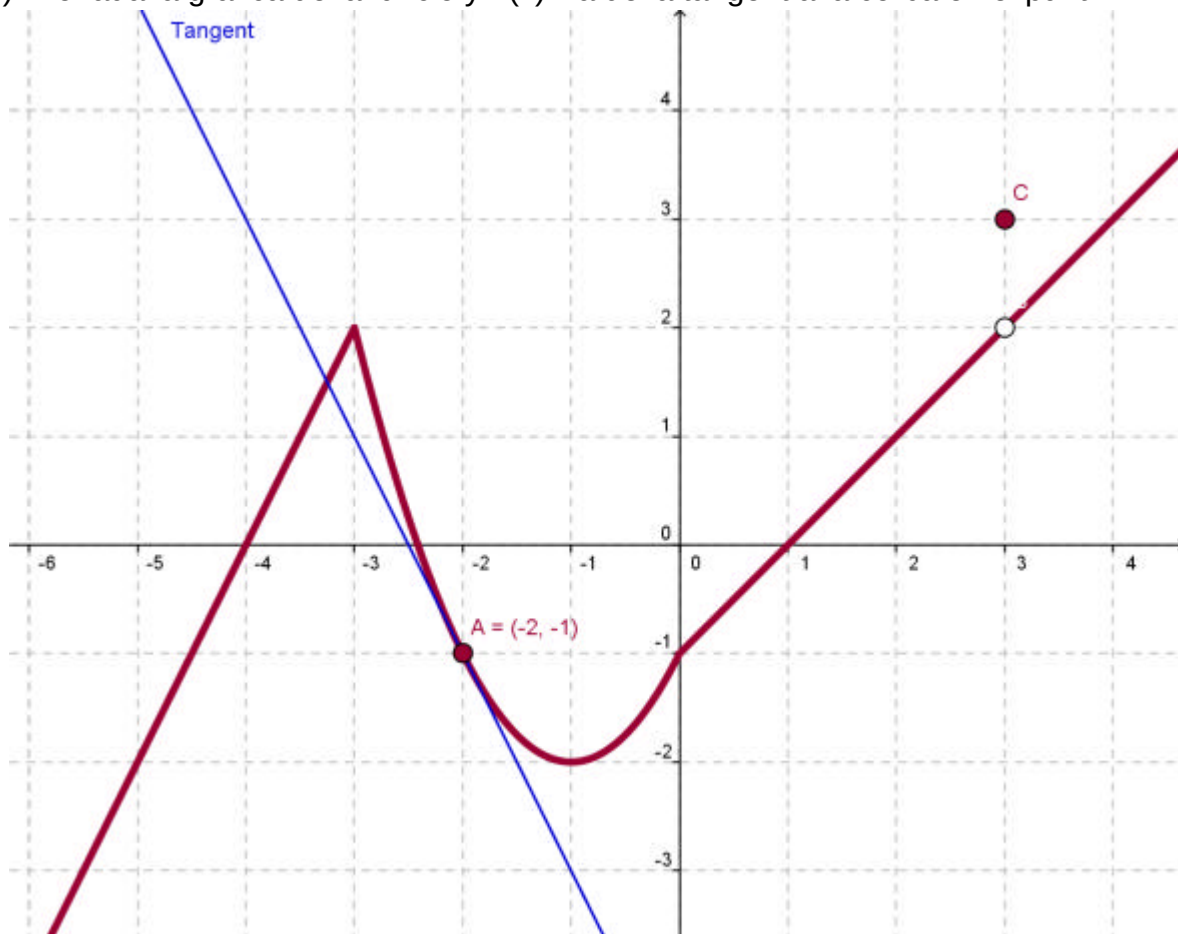


Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donada la gràfica de la funció $y=f(x)$ i la de la tangent a la corba en el punt A



a) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $y=f(x)$.

b) Calculeu els valors de:

$$f'(-5)= \quad f'(-2)= \quad f'(3^-)= \quad f'(3^+)= \quad f'(3)=$$

c) En quins valors $f'(x) = 0$?

(1+0,75+0,25=2 punts)

2) a) Demostreu la fórmula de derivació de les potències $f(x) = x^k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

b) Deriveu $f(x) = \sqrt[7]{\left(\frac{7x}{3}\right)^3}$

(0,75+0,25=1 punt)

3)

$$f(x) = \begin{cases} = \sin(x) + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ = a + bx + cx^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ = \frac{d}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculeu els valors dels paràmetres a, b, c i d que fan que la funció sigui derivable en tot el domini.

(2 punts)

.../... SEGUEIX AL DARRERA

4) Deriveu i simplifiqueu la màxim: $y = \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{2}{x-1}$

(1 punt)

5) Deriveu les funcions següents:

a) $y = \arctg(2x) \cdot e^{4x^2}$

b) $f(x) = (2x+5)^{\cos(2x)}$

(0,5+1=1,5 punts)

6) Troba els punts on s'anul·la la derivada de la corba: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.

[1,5 punts]

7) Determineu els coeficients a i b de la paràbola $y = ax^2 + bx + 1$, sabent que la recta tangent en el punt en què $x=1$ és $y=-2x$.

(1 punt)

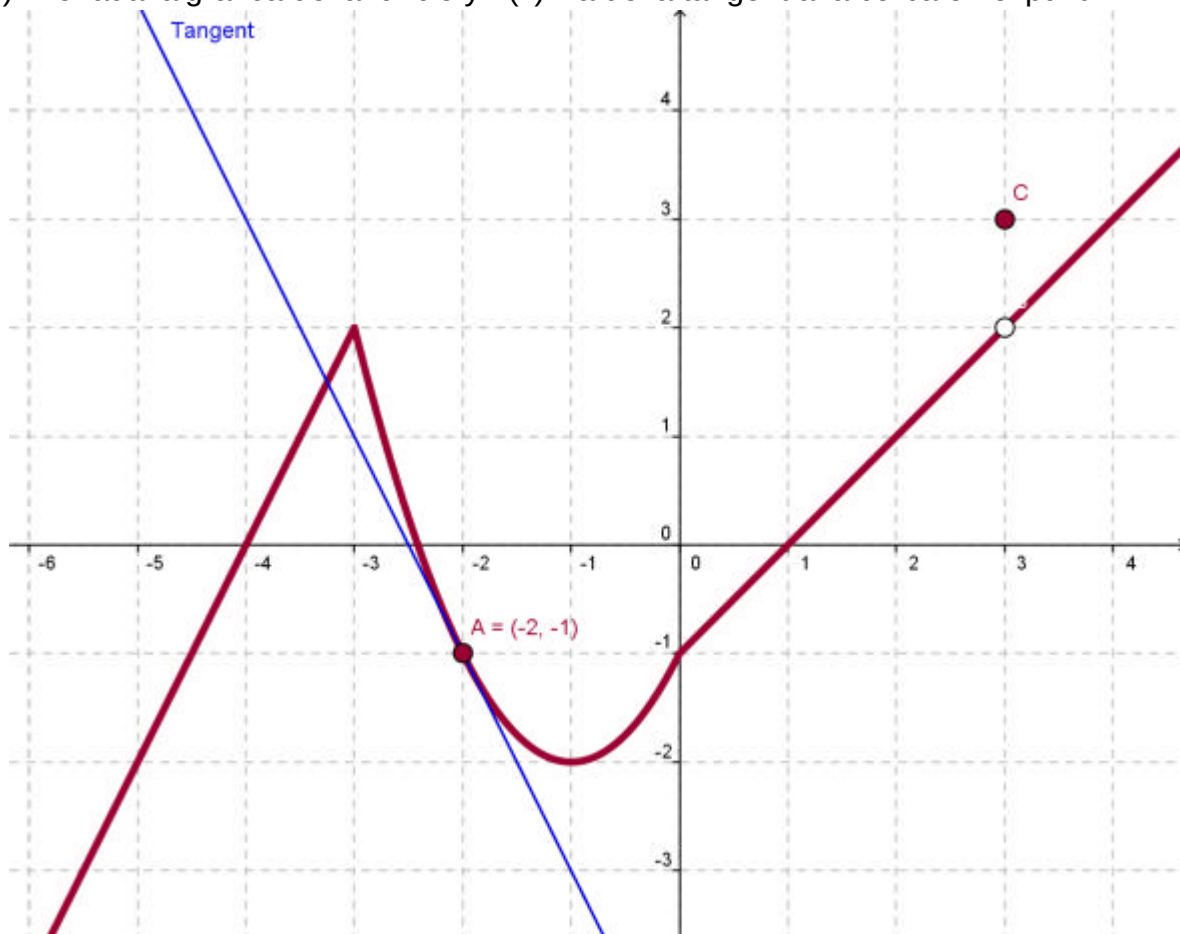


Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donada la gràfica de la funció $y=f(x)$ i la de la tangent a la corba en el punt A



a) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $y=f(x)$.

b) Calculeu els valors de:

$$f'(-5)= \quad f'(-2)= \quad f'(3^-)= \quad f'(3^+)= \quad f'(3)=$$

c) En quins valors $f'(x) = 0$?

(1+0,75+0,25=2 punts)

①

a) DOMINI = $\mathbb{R}$

CONTÍNUA $\forall x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$

DERIVABLE $\forall x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$
 $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$

b) $f'(-5) = \frac{2}{-1} = -2$; $f'(-2) = \frac{-2}{-1} = 2$; $f'(3^-) = 1$; $f'(3^+) = 1$
 $\nexists f'(3)$ ja que no és CONTÍNUA en $x = 3$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

2) a) Demostreu la fórmula de derivació de les potències $f(x) = x^k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

b) Deriveu $f(x) = \sqrt[7]{\left(\frac{7x}{3}\right)^3}$

(0,75+0,25=1 punt)

② a) $f(x) = x^k \quad \forall k \in \mathbb{R}$ *per derivar logàritmicament*

$$\ln f(x) = \ln(x^k)$$

$$\ln(f(x)) = k \ln(x)$$

Ara derivo

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = k \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = k \cdot \frac{1}{x} \cdot x^k$$

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

b) $f(x) = \left(\frac{7x}{3}\right)^{3/7} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{7} \left(\frac{7x}{3}\right)^{\frac{3}{7}-1} \cdot \frac{7}{3} = \left(\frac{7x}{3}\right)^{-4/7} = \left(\frac{3}{7x}\right)^{4/7}$

3)

$$f(x) = \begin{cases} = \sin(x) + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ = a + bx + cx^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ = \frac{d}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculeu els valors dels paràmetres a, b, c i d que fan que la funció sigui derivable en tot el domini.

(2 punts)

③ *Dom $f = \mathbb{R}$*
Sabem que $f(x)$ és CONT i derivable
 $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i a més

$$f'(x) = \begin{cases} = \cos x & \text{si } x < 0 \\ = b + 2cx & \text{si } 0 < x < 1 \\ = -\frac{d}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On veut a priori la CONT : DERIV
en des PTS $x=0$; $x=1$

• CONT en $x=0 \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} a + bx + cx^2 = a \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a=1$
 $f(0) = \sin(0) + 1 = 1$
 Sont IGUAUX

• CONT en $x=1 \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a + bx + cx^2 = a+b+c \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{d}{x} = d \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$
 $f(1) = a+b+c$

$\Leftrightarrow a+b+c = d$

• Deriv en $x=0$ ~~(L)~~ en CONT en $x=0$: a me

$f'(0^-) = f'(0^+) \Leftrightarrow a=1$
 $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = \cos(0) = 1$
 $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b + 2cx = b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

• Deriv en $x=1$ ~~(L)~~ en CONT en $x=1$: a me $f'(1^-) = f'(1^+)$ $\Leftrightarrow$
 $a+b+c=d$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} b + 2cx = b + 2c \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-d}{x^2} = -d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=d \\ b+2c=-d \end{cases}$

Ass doncs $f(x)$ és cont i derivable en $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a=1} \\ \boxed{b=1} \\ a+b+c=d \\ b+2c=-d \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2+c=d \\ 1+2c=-d \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{a+2a} \\ 3+3c=0 \Rightarrow \boxed{c=-1} \end{array} \right\}$$

$$2-1=d \Rightarrow \boxed{1=d}$$

$$\Leftrightarrow a=1; b=1; c=-1; d=1$$

4) Deriveu i simplifiqueu la màxim: $y = \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{2}{x-1}$

(1 punt)

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad y &= \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{2}{x-1} = \ln(1) - 2\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} \\ y' &= -2 \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2(x-1) - 2}{(x-1)^2} = \frac{-2x + 2 - 2}{(x-1)^2} \\ y' &= \frac{-2x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

5) Deriveu les fonctions següents:

a) $y = \arctg(2x) \cdot e^{4x^2}$

b) $f(x) = (2x + 5)^{\cos(2x)}$

(0,5+1=1,5 punts)

5) a) $y = \arctg(2x) \cdot e^{4x^2}$
 $y' = \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 \cdot e^{4x^2} + \arctg(2x) \cdot e^{4x^2} \cdot 8x$

b) $f(x) = (2x + 5)^{\ln(2x)}$

Farem derivada logarítmica

$$\ln y = \ln (2x + 5)^{\ln(2x)} = \ln(2x) \ln(2x + 5)$$

Ara derivem els 2 membres.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\ln(2x) \cdot \frac{2}{2x + 5} + \ln(2x) \cdot \frac{2}{2x + 5}$$

$$y' = \left[-2 \ln(2x) \ln(2x + 5) + \frac{2 \ln(2x)}{2x + 5} \right] (2x + 5)^{\ln(2x)}$$

6) Troba els punts on s'anul·la la derivada de la corba: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.

[1,5 punts]

⑥ $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$

Derivem implícitament

$$2x + 2y y' + 6 - 2y' = 0$$

$$2y y' - 2y' = -2x - 6$$

$$y'(2y - 2) = -2x - 6$$

$$y' = \frac{-2x - 6}{2y - 2} = \frac{-x - 3}{y - 1}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} -x - 3 = 0 \\ -x = +3 \end{array}$$

$$\boxed{x = -3}$$

Així doncs els pts són el de $x = -3$,
la $y = ?$

$$(-3)^2 + y^2 - 18 - 2y - 15 = 0$$

$$y^2 - 2y + 9 - 18 - 15 = 0$$

$$y^2 - 2y - 24 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

$$\text{PTS } (-3, 6) \text{ i } (-3, -4)$$

- 7) Determineu els coeficients a i b de la paràbola $y = ax^2 + bx + 1$, sabent que la recta tangent en el punt en què $x=1$ és $y = -2x$.

(1 punt)

7) $y = ax^2 + bx + 1$

En el pt $x=1 \Rightarrow y = ?$ és un pt de la recta $\Rightarrow$
 $y = -2x$
 $y = -2$

PT $(1, -2)$ és el PT de TANGÈNCIA i per tant també és de la corba

I com $y = -2x \Rightarrow y'(\text{en el PT de TANGÈNCIA}) = -2$

$(1, -2) \in$ a la corba $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \\ y'(\text{en } (1, -2)) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $y'(x) = 2ax + b$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + 1 = -2 \\ 2a + b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = -3 \\ 2a + b = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \hline 2a - 1a \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{a = 1}$$

$$1 + b = -3$$

$$\boxed{b = -4}$$