Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Deriveu i simplifiqueu al màxim:

$$y = \frac{1}{2} arctag(x) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)$$

(2 punts)

2) Deriveu les funcions següents:

a) $y = 4p^2 + x - \sqrt[3]{x^2}$

b) $y = \dfrac{5x^2 - 10x + 5}{x-1}$

c) $y = \left(3x^2+5\right)^{2x-3}$

d) $y = \cos^3(3x+1) \cdot e^x$

(4 punts)

3) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x \le 0 \\ 2x + b & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Per quins valors dels paràmetres ***a*** i ***b*** la funció és contínua i derivable a R?

b) Expresseu la funció f ' (x) per als valors que fan que sigui derivable a tot R

(1,5 punts)

4) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu l'equació.

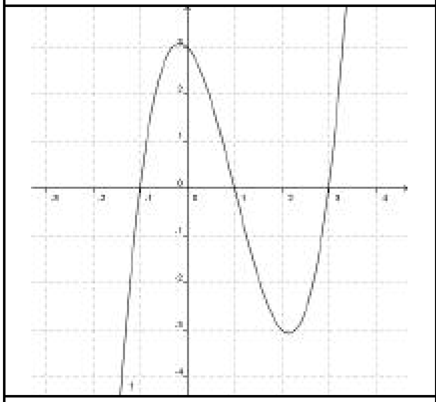
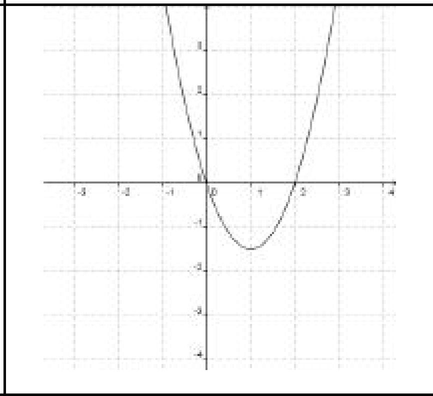
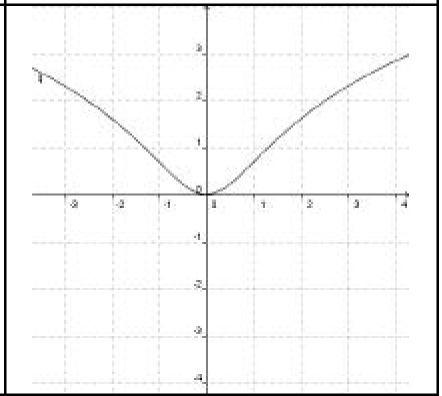
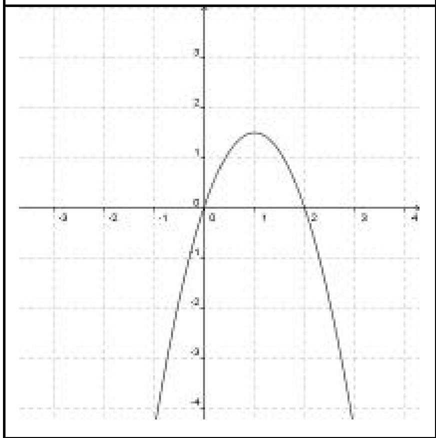
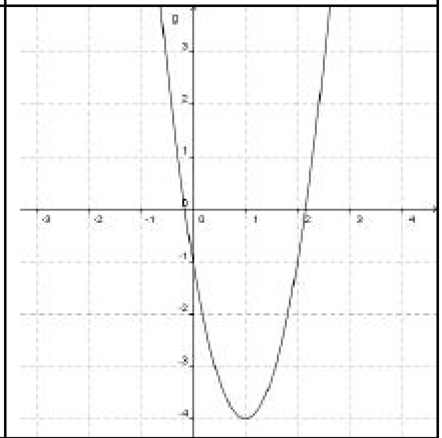
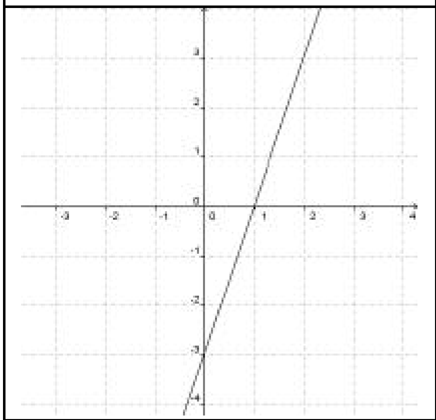
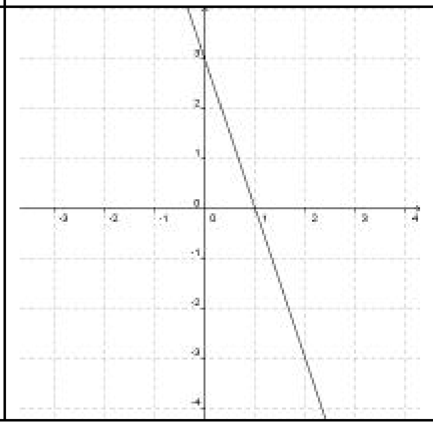
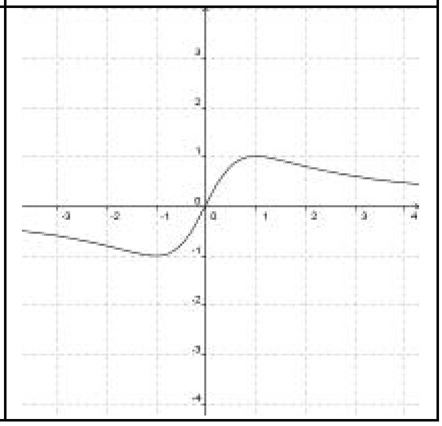
(1 punt)

5) Demostreu que si $f(x) = x^k$ per a tot x R on K és una constant aleshores $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ per a tot x R

(0,5 punt)

.../...
Segueix al darrera
.../...

6) Aparella les gràfiques de les funcions (A, B, C i D) amb les gràfiques de les seves derivades (1, 2, 3 i 4):

A	B	C
		
D		**1**
		
2	**3**	**4**
		

(1 punt)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Deriveu i simplifiqueu al màxim:

$$y = \frac{1}{2}arctag(x) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)$$

(2 punts)

Abans de derivar arreglem la funció per expressar-la d'una forma més còmode de derivar. Apliquem les propietats dels logaritmes:

$$y = \frac{1}{2}arctag(x) + \frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left((x+1)^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}arctag(x) + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{4}2\ln\left(x+1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[arctag(x) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(x+1\right)\right]$$

I ara derivem:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)+x(x+1)-(1+x^2)}{\left(1+x^2\right)\left(x+1\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1+x^2+x-1-x^2)}{\left(1+x^2\right)\left(x+1\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x+1+x^2+x-1-x^2)}{\left(1+x^2\right)\left(x+1\right)}\right] = \frac{2x}{2\left(1+x^2\right)\left(x+1\right)} = \frac{x}{\left(1+x^2\right)\left(x+1\right)}$$

2) Deriveu les funcions següents:

a) $y = 4p^2 + x - \sqrt[3]{x^2}$

$$y' = 0 + 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

b) $y = \dfrac{5x^2 - 10x + 5}{x-1}$

Si es veu que la funció inicial es pot simplificar és molt ràpida.

$$y = \frac{5(x-1)^2}{x-1} = 5(x-1) \text{ i aleshores } y' = 5$$

Si no es veu i es deriva a com a divisió també ha de sortir:

$$y' = \frac{(10x-10)(x-1)-(5x^2-10x+5)}{(x-1)^2} = \frac{10x^2-10x-10x+10-5x^2+10x-5}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{5x^2-10x+5}{(x-1)^2} = \frac{5(x-1)^2}{(x-1)^2} = 5$$

c) $y = \left(3x^2+5\right)^{2x-3}$

Aquesta es soluciona per derivació logarítmica.
1r apliquem logaritmes i utilitzem les propietats dels logaritmes:

$$\ln(y) = \ln\left[\left(3x^2+5\right)^{2x-3}\right] = (2x-3)\,\ln(3x^2+5)$$

Ara derivem els dos membres respecte x i tenim:

$$\frac{y'}{y} = 2\,\ln(3x^2+5)+(2x-3)\frac{6x}{3x^2+5}$$

$$y' = \left[2\,\ln(3x^2+5)+\frac{(2x-3)6x}{3x^2+5}\right]y =$$

$$= \left[2\,\ln(3x^2+5)+\frac{(2x-3)6x}{3x^2+5}\right]\left(3x^2+5\right)^{2x-3}$$

d) $y = \cos^3(3x+1)\cdot e^x$

$$y' = 3\cos^2(3x+1)(-\sin(3x+1))\cdot 3\cdot e^x + \cos^3(3x+1)\cdot e^x =$$

$$= \cos^2(3x+1)\cdot e^x\cdot\left(-9\,\sin(3x+1)+\cos(3x+1)\right)$$

(4 punts)

3) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x \le 0 \\ 2x+b & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Per quins valors dels paràmetres ***a*** i ***b*** la funció és contínua i derivable a R?

La funció és clarament contínua i derivable en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ i fins i tot ja podem dir que $f'(x) = \begin{cases} a\cdot e^{ax} & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Ara anem a estudiar el que passa al punt de x=0
Per a que sigui contínua cal que siguin iguals aquestes tres coses:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} e^{a\cdot x} = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(2x+b) = b \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = 1$$

Per a que sigui derivable en el punt de x=0 cal que:

- sigui contínua en el punt, és a dir que **b=1** i
- que siguin iguals aquests dos valors:

$$\left.\begin{array}{r} f'(0^-) = a\cdot e^{a\cdot 0} = a\cdot e^0 = a \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2$$

Per tant per a que la funció sigui contínua i derivable a tot R cal que **a=2 i b=1**

b) Expresseu la funció f ' (x) per als valors que fan que sigui derivable a tot R

Per aquests dos valors a=1 i b=1 tenim que funció derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cdot e^{2x} & si \quad x \le 0 \\ 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(1,5 punts)

4) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

Calculem la segona coordenada del punt de tangència f(3)= 27–27+6+2=8

La recta tangent en el punt (3,f(3)) és una recta amb pendent f **'**(3)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f'(3) = 3\ \ 3^2 - 6\cdot 3 + 2 = 27 - 18 + 2 = 11$$

així doncs la recta buscada és una recta y=mx+n tal que:

- passa pel punt (3,8) i
- té pendent = 11

per tant **m=11** i

8 = 11·3+n $\Rightarrow$ 8–33 = n $\Rightarrow$ **n = –25**

i la recta tangent buscada és Y=11 X – 25

b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu l'equació.

La pregunta es pot traduir per si existeix algun altre punt de coordenada x tal que f **'**(x)=11 plantejant l'equació i solucionant-la:

$$3x^2 - 6x + 2 = 11$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36+108}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6} = \begin{cases} = \dfrac{18}{6} = 3 \\ = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

I ens surt que a més del punt anterior (el de x=3) hi ha un altre el de x=–1

i imposant que la recta Y=11X+n passi pel punt (–1, f(–1))=**(–1,– 4)** tenim que:

– 4 = –11 + n $\Rightarrow$ n=7

I la recta tangent en aquest punt és Y=11 X+7

(1 punt)

5) Demostreu que si $f(x) = x^k$ per a tot x R on K és una constant aleshores $f'(x) = k\cdot x^{k-1}$ per a tot x R

Per derivació logarítmica la demostració és molt ràpida

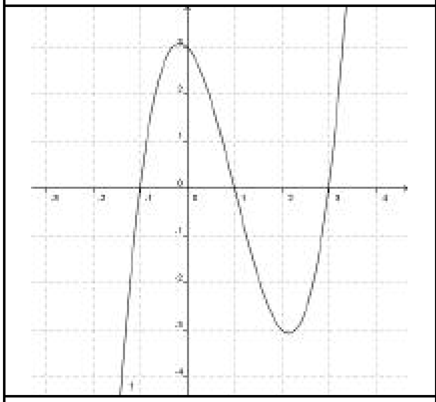
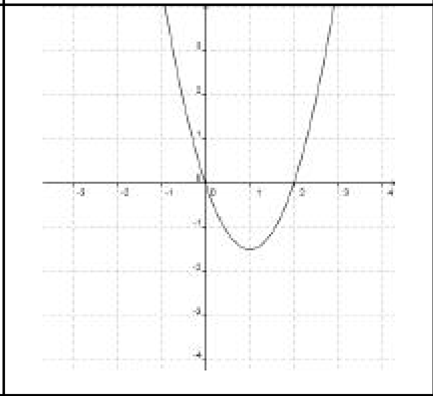
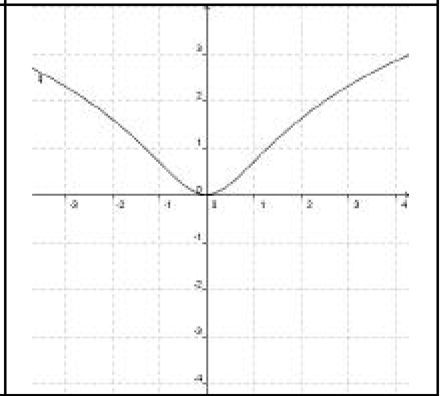
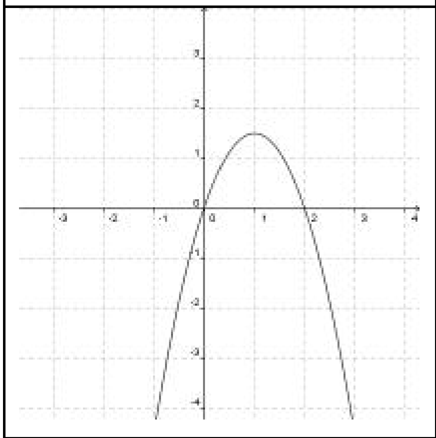
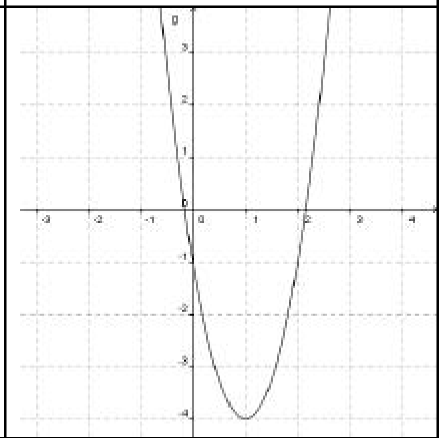
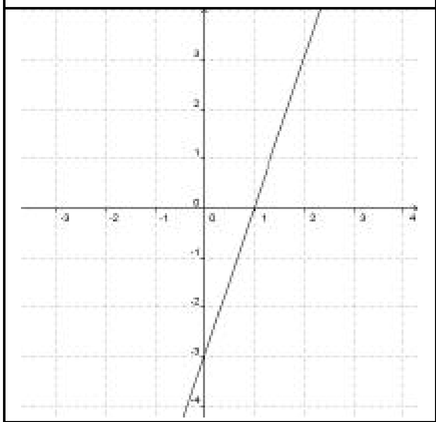
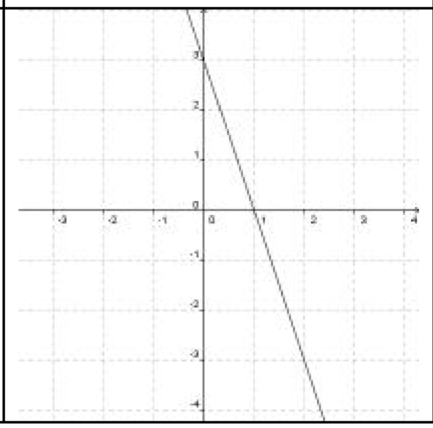
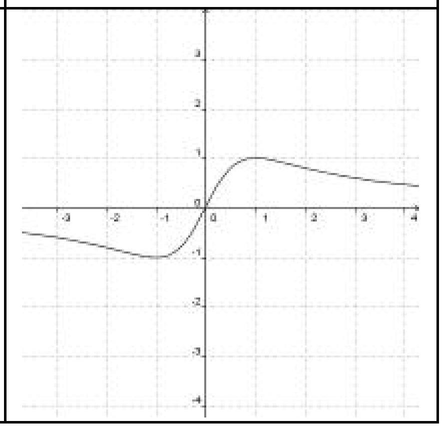
$$Y = x^k \Rightarrow \ln(y) = \ln\left(x^k\right) \Rightarrow \ln(y) = k \cdot \ln(x)$$

ara derivem i obtenim que:

$$\frac{y'}{y} = k\frac{1}{x} \Rightarrow y' = k\frac{1}{x}x^k = k\,x^{k-1}$$

(0,5 punt)

6) Aparella les gràfiques de les funcions (A, B, C i D) amb les gràfiques de les seves derivades (1, 2, 3 i 4):

A	B	C
		
D		**1**
	**A–1** **B–2** **C–4** **D–3**	
2	**3**	**4**
		

(1 punt)