



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 17/5/2010

1r BLOC: Anàlisi

- 1) Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

[1 punt pel càlcul d'extrems, els punts de tall i la gràfica; 1 punt pel càlcul de l'àrea= 2 punts]

- 2) Considereu la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

[2 punts]

- 3) Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} = x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ = a e^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ on a i b són nombres reals.

- a) Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot $\mathbb{R}$?
b) Trobeu els valors de a i b per als quals f sigui contínua però no derivable a tot $\mathbb{R}$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

- 4) Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

- a) Calculeu la integral $\int f(x) dx$.
b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 17/5/2010

2n BLOC: Àlgebra i Geometria

5) Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

a) Estudieu-ne el rang segons els valors de m .

b) Digueu quina és la posició relativa dels plans

$p_1: x + y + 2z = 2$, $p_2: 2x + my + 2mz = 2 + m$ i $p_3: mx + 2y + (2 + m)z = 0$, segons els valors de m .

[1 punt cada apartat= 2 punts]

6) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$.

a) Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A_{10} .

b) Calculeu per $p=2$ i $q=4$ la matriu inversa de A

[1 + 1 = 2 punts]

7) Trobeu el punt simètric del punt $A(0,0,1)$ respecte el pla $p: 2x + z = 6$

[2 punts]

8) Una recta r és paral·lela a la recta $s: x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt A la recta $t: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$, i en un punt B la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes r i t .

b) Trobeu el punt B calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta l .

c) Trobeu l'equació de la recta r .

d) Trobeu el punt A .

[1 punt cada apartat= 4 punts]



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 17/5/2010

1r BLOC: Anàlisi

- 1) Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

[1 punt pel càlcul d'extrems, els punts de tall i la gràfica; 1 punt pel càlcul de l'àrea]

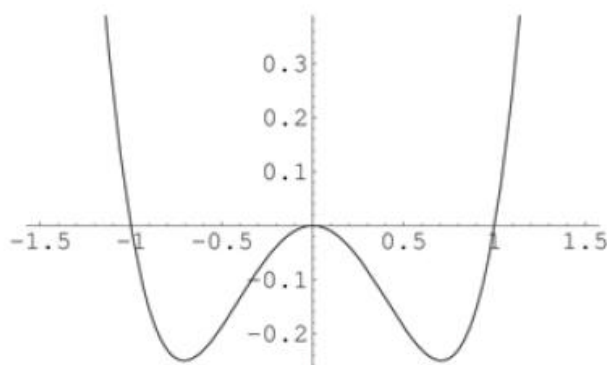
Si $f(x) = x^4 - x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

Extrems relatius: $4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Com $f''(x) = 12x^2 - 2$, $f''(0) < 0$, $f''(1/\sqrt{2}) > 0$ i $f''(-1/\sqrt{2}) > 0$. Llavors, el punt $(0,0)$ és un màxim relatiu i $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$ són mínims relatius.

Punts de tall: $x^4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, 1, -1$, $(0,0)$, $(1,0)$ i $(-1,0)$.

Gràfica:



L'àrea demanada s'obté de calcular

$$A = -\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{15} u^2.$$

PUNTUACIÓ:

0.5 punts pels extrems i els punts de tall.

0.5 punts per la representació gràfica.

0.5 punts pel càlcul de la primitiva.

0.5 punts per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.

- 2) Considereu la funció definida per $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

[Puntuació: 2 punts]

La recta tangent passa pel punt $(0, f(0))=(0,1)$ i el pendent és $m = f'(0)$ així doncs calculem 1r la derivada de la funció

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

I calculant tenim que $f'(0) = -1$

Per tant la recta buscada és $Y-1 = -1(X-0) \Rightarrow Y = -X + 1$

L'altra pregunta que fa és equivalent a veure si hi ha altres valors de x tals que $f'(x) = -1$

Així doncs solucionant l'equació tenim:

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(2x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Així doncs la resposta és que hi ha un altre punt on la recta tangent té el mateix pendent que en $X=0$ [el punt $(0,1)$] i és en el punt de $X=-2$ [és a dir en el punt $(-2, f(-2))=(-2, -5)$]

3) Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} = x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ = a e^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ on a i b són nombres reals.

- a) Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot $\mathbb{R}$?
 b) Trobeu els valors de a i b per als quals f sigui contínua però no derivable a tot $\mathbb{R}$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

- a) **[1 punt]** Tant $x^2 + x + b$ com $a \cdot e^{bx}$ són funcions contínues en tot $\mathbb{R}$. Per tant, l'únic punt on f pot tenir una discontinuïtat és a $x = 0$. Estudiem els límits laterals en el punt 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a.$$

Per tal que f sigui contínua a $x = 0$ cal, doncs, que $a = b$.

Penalitzeu amb 0,5 els que no comentin res de la continuïtat de f fora de $x = 0$.

- b) **[1 punt]** Si derivem f , obtenim:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ a b e^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Per tal que f' existeixi en el punt $x = 0$, cal novament que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. O

sigui, cal que $1 = ab$. Com que la condició de continuïtat és que $a = b$, tenim que $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Per tant, hi ha dues parelles de valors que farien f contínua i derivable: $a = b = 1$ o bé $a = b = -1$. Qualsevol parell de valors $a = b \neq \pm 1$ resolen la qüestió.

4) Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

- a) Calculeu la integral $\int f(x) dx$.
 b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

- a) **[1 punt]**

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{1}{10} \int 10x \cdot (5x^2 - 4)^{-1/2} dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 - 4)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C.$$

- b) **[1 punt]** Per trobar la primitiva que ens demanen, substituïm a

$$F(x) = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C; \quad 1 = F(1) = \frac{1}{5} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{5}.$$

2n BLOC: Àlgebra i Geometria

5) Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

a) Estudieu-ne el rang segons els valors de m .

b) Digueu quina és la posició relativa dels plans

$p_1: x + y + 2z = 2$, $p_2: 2x + my + 2mz = 2 + m$ i $p_3: mx + 2y + (2 + m)z = 0$, segons els valors de m .

[1 punt cada apartat= 2 punts]

a) Esglaonant,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2m-4 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$$

Lavors, el rang de la matriu és 3 si $m \neq 2$ i 1 si $m = 2$.

L'obtenció del valor de m que discrimina també es pot fer igualant a zero el determinant de la matriu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2.$$

A partir d'aquí cal esbrinar quin rang té la matriu quan $m = 2$

b) Val la pena observar que la matriu de l'apartat anterior és la matriu de coeficients dels plans donats. Així, si $m \neq 2$, el sistema és compatible determinat; per tant, els plans es tallen en un punt. Si $m = 2$, les equacions són $\pi_1: x + y + 2z = 2$, $\pi_2: 2x + 2y + 4z = 4$ i $\pi_3: 2x + 2y + 4z = 0$, els dos primers plans són coincidents i el tercer és paral·lel a ells.

6) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$.

- Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10} .
- Calculeu per $p=2$ i $q=4$ la matriu inversa de A

[2 + 1 = 3 punts]

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

i la igualtat es compleix quan $p = 0$ i $q = 1$.

Si la matriu verifica $A^2 = A$, llavors, $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A$. Procedint de manera successiva, es pot veure que qualsevol altra potència de la matriu A també val A .

1 punt per trobar els valors de p i q .

1 punt per justificar que $A^{10} = A$. No es demana fer una demostració per inducció o similar. Simplement que justifiquin aquest resultat sense fer càlculs.

Després demanen calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i surt $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7) Trobeu el punt simètric del punt $A(0,0,1)$ respecte el pla $p : 2x + z = 6$

[2 punts]

t recta perpendicular a p per A t= recta determinada pel punt A i que té com a vector director el vector perpendicular al pla p $\vec{v}_{\perp p} = (2,0,1)$ així la recta és

$t : \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$ i un punt arbitrari d'aquesta recta és $T_l(2l, 0, 1+l)$

la projecció ortogonal del A sobre el pla p serà un $T_l(2l, 0, 1+l)$ que verifiqui l'equació del pla. Així doncs:

$$4l + 1 + l = 6 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow T_{l=1}(2, 0, 2)$$

I ara només cal trobar el punt simètric de A respecte aquest punt $T_{l=1}(2, 0, 2)$. Així doncs si el punt buscat és $B(x, y, z)$ tenim que T ha de ser el punt mig del segment AB, així doncs:

$$\frac{x}{2} = 2; \frac{y}{2} = 0; \frac{z+1}{2} = 2 \Rightarrow x = 4, y = 0, z = 3 \Rightarrow B(4, 0, 3)$$

- 8) Una recta r és paral·lela a la recta $s: x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt A la recta $t: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$, i en un punt B la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.
- Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes r i t .
 - Trobeu el punt B calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta l .
 - Trobeu l'equació de la recta r .
 - Trobeu el punt A .

[1 punt cada apartat= 4 punts]

a) El pla demanat és paral·lel als vectors directors de les rectes s i t , $(1,1,1)$ i $(3,2,1)$ respectivament. Llavors, el vector de coeficients (a,b,c) del pla demanat és qualsevol que sigui perpendicular als dos vectors. Per exemple, es pot plantejar el sistema

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (1,1,1) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (3,2,1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow b = -2a, c = a.$$

Per tant, qualsevol vector de la forma $(a, -2a, a)$, per exemple $(1, -2, 1)$, serveix com a vector de coeficients o perpendicular al pla. Per construir l'equació només resta trobar un punt del pla. Qualsevol de la recta t serveix, per exemple el $(1, 0, -1)$.

Equació del pla: $(x-1) - 2y + (z+1) = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$.

També es pot obtenir el vector (a,b,c) per mitjà del producte vectorial

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

i a partir d'aquí es completa la construcció de l'equació.

b) Punt d'intersecció de la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ i el pla $x - 2y + z = 0$:

La primera igualtat de l'equació de la recta permet escriure $x = y + 1$. Si es substitueix dins l'equació del pla i s'aïlla z s'obté $z = y - 1$. Finalment, substituint z dins la segona igualtat de l'equació de la recta, $\frac{y-1}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow y = 1$ i el punt buscat és $B=(2,1,0)$.

c) La recta r és la paral·lela a s que passa per B ,

$$x - 2 = y - 1 = z.$$

d) Finalment, el punt A és el d'intersecció de r i t ,

$$\begin{cases} x - 2 = y - 1 = z \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1 \end{cases}$$

De les dues igualtats de l'equació de r es pot escriure $x = z + 2$ i $y = z + 1$. Quan es substitueixen dins l'equació de t ,

$$\frac{z+1}{3} = \frac{z+1}{2} = z + 1,$$

on les dues igualtats es verifiquen quan $z = -1$. Per tant, el punt A és $(1,0,-1)$.

PUNTUACIÓ:

Apartat a) 0.5 punts pel vector de coeficients i 0.5 per l'equació del pla.

Apartats b), c) i d) 1 punt cada un.