Nom i Cognoms: **Grup:** **Data: 21-5-2007**

1r BLOC:

1) Trobeu els límits:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x+\sin x}$

2) Trobeu els valors de a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en tot R

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ ax^3-bx+2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

3) Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ en X=0

4) Deriveu les funcions següents:

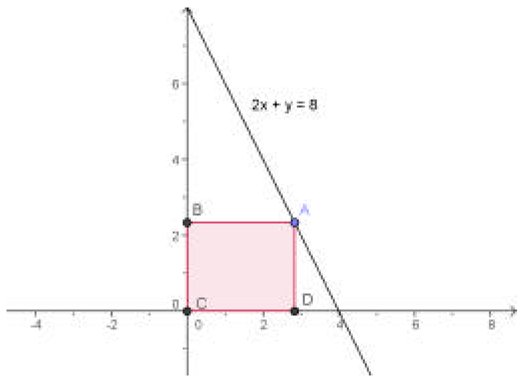
   a) $f(x)=\ln^2(x^2-1)$ b) $f(x)=[\sin(x)]^{3x}$ c) $y=x^{14}+\pi^e-7\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[2]{x^3}}$

5) Donada la funció $f(x)=\dfrac{3x^2-9x+3}{3x-1}$

   a) Determineu quin és el seu domini.
   b) Trobeu les seves asímptotes i l'aspecte de la gràfica al seu voltant.
   c) Calculeu i simplifiqueu al màxim la primera derivada
   d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
   e) Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció.

6) Dins del triangle limitat pels eixos OX, OY i la recta r: 2X+Y=8 s'inscriu un rectangle que té un vèrtex a l'origen (0,0), dos costats sobre els eixos i l'altre vèrtex sobre la recta r.

   Determineu quin és el punt de la recta que fa que l'àrea del rectangle ABCD sigui màxima i el valor d'aquesta àrea màxima.



7) Calculeu les integrals:

   a) $\displaystyle\int \frac{3x\sqrt{x}+14x^3+1}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{7\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx$

   c) $\displaystyle\int 3x\; e^{14x^2+2007}\,dx$

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data: 21-5-2007**

2n BLOC:

8) Calculeu l'àrea del recinte pla limitat per les rectes Y=X, Y=2 X i la paràbola $Y=X^2$

9) Trobeu les integrals següents:

a) $\int x\cdot e^{x^2}\, dx$ **b)** $\int \frac{x\, dx}{x^2-9}$

10) Considereu la recta que r i el pla π donats per les equacions següents

$$r:\begin{cases}(m+1)\,X+Y &= m+1\\ mX+Y &= m\end{cases}$$

$$\pi:\ mX+Y+(m^2-1)Z \ = 3m+2$$

Discutiu, segons el valor del paràmetre m, el sistema format per aquestes 3 equacions i interpreteu geomètricament quina és la posició relativa de r i π en cada cas.

11) Donats els punt P(2,1,–2), la recta r: $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ i el pla π **:** $4x-3y+5=0$ calculeu

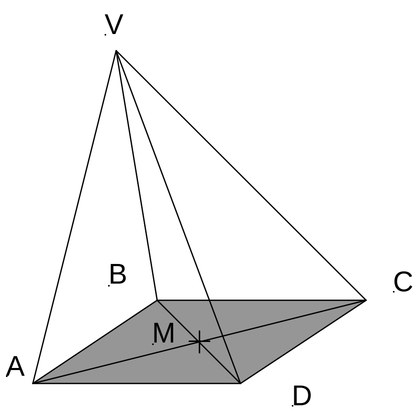
a) La distància de P a π.
b) La projecció perpendicular del punt P sobre la recta r
c) L'angle format per la recta r i el pla π.

12) Donades les dues rectes

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2} \qquad \text{i} \qquad s:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}$$

a) Calculeu la distància entre les rectes
b) Trobeu l'equació de la perpendicular comuna

13) Donada la piràmide ABCDV de base el parel·lelogram ABCD i vèrtex V.



En una referència ortonormal sabem les coordenades de A(1,0,2), B(3,1,0), V(0,0,1) i les del centre del paral·lelogram ABCD M(0,2,–3).

Calculeu:
a) les coordenades de la resta dels vèrtexs (C i D).
b) El volum de la piràmide.
c) L'àrea de la base ABCD.
d) L'alçada de la piràmide.

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Examen final

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data: 21/5/2007**

1r BLOC:

1) Trobeu els límits:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ **c)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x+\sin x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-x^2-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x+x}=\dfrac{-3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)^2\,(x+1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=\dfrac{1}{(0)}$

Trobem els límits laterals: $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x+\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$

* Hem aplicat la regla de L'Hôpital.

2) Trobeu els valors de a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en tot R

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-ax+b & \text{si} \quad x<1\\ ax^3-bx+2 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$$

- Continuïtat:
  - Si $x\neq1$:
    $f(x)$ és contínua, ja que està formada per polinomis, que són funcions contínues.
  - En $x=1$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(3x^2-ax+b\right)=3-a+b\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(ax^3-bx+2\right)=a-b+2\\ f(1)=a-b+2\end{cases}$$

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x=1$, ha de ser $3-a+b=a-b+2$; és a dir, $2a-2b=1$.

- Derivabilitat:
  - Si $x\neq1$: $f(x)$ és derivable, i la seva derivada és:

$$f'(x)=\begin{cases}6x-a & \text{si} \quad x<1\\ 3ax^2-b & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

  - En $x=1$: Perquè sigui derivable en $x=1$, les derivades laterals han de ser iguals:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 6-a \\ f'(1^+) = 3a-b \end{array}\right\} \; 6-a = 3a-b$$

- Unint les dues condicions anteriors, $f\,(x)$ serà derivable si:

$$\left.\begin{array}{l} 2a-2b=1 \\ 6-a=3a-b \end{array}\right\} \; a=\frac{11}{6};\quad b=\frac{4}{3}$$

3) Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}}$ en X=0

- Ordenada del punt: $f\,(0) = 1$
- Pendent de la recta:

$$f'(x)=\frac{2xe^x-(x^2+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x\,(2x-x^2-1)}{(e^x)^2}=\frac{2x-x^2-1}{e^x}$$

$f'(0) = -1$

- Equació de la recta tangent: $y = 1 - 1\,(x - 0) \;\rightarrow\; y = -x + 1$

4) Deriveu les funcions següents:

a) $f(x)=\ln^2(x^2-1)$ b) $f(x)=[\sin(x)]^{3x}$ c) $y=x^{14}+p^e-7\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[2]{x^3}}$

a) $Y'=f(x)=2\ln(x^2-1)\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{4x\cdot\ln(x^2-1)}{x^2-1}$

b) Cal fer derivació logarítmica ln (Y) = 3x Ln |sin(x)| i ara al derivar queda:

$$\frac{y'}{y}=3\ln|\sin(x)|+3x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\Rightarrow Y'=\left(3\ln|\sin(x)|+3x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)(\sin(x))^{3x}$$

c) $Y=X^{14}+p^e-7X^{3/4}-3X^{-3/2}\Rightarrow Y'=14X^{13}+0-\dfrac{21}{4}X^{-1/4}+\dfrac{9}{2}X^{-5/2}$

5) Donada la funció $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{3x^2-9x+3}{3x-1}}$

a) Determineu quin és el seu domini.
b) Trobeu les seves asímptotes i l'aspecte de la gràfica al seu voltant.
c) Calculeu i simplifiqueu al màxim la primera derivada
d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
e) Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció.

a) Dom f = R – {1/3}

b) Asímptotes verticals: $X=\dfrac{1}{3}$, per l'esquerra la funció s'acosta a $-\infty$ i per la dreta a $+\infty$

Asímptotes inclinades tant per x---> $+\infty$ com per x--->$-\infty$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{3x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mX)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-9x+3}{3x-1}-X=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-9x+3-3x^2+x}{3x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-8x}{3x}=\frac{-8}{3}$$

així doncs $Y = X - \frac{8}{3}$ és asímptota tant per x---> $+\infty$ com per x--->$-\infty$

c) $f'(x) = \frac{(6x-9)\,(3x-1) - (3x^2 - 9x + 3)\,3}{(3x-1)^2} = \frac{18x^2 - 6x - 27x + 9 - 9x^2 + 27x - 9}{(3x-1)^2} = \frac{9x^2 - 6x}{(3x-1)^2}$

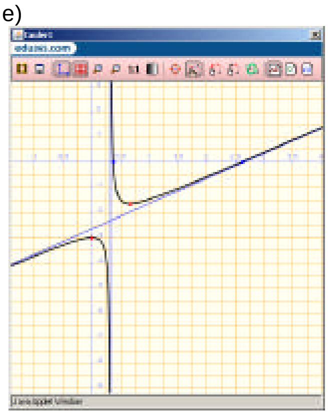
d) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 9x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; 3x(3x-2) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 3x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Signe de f ' (x)

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

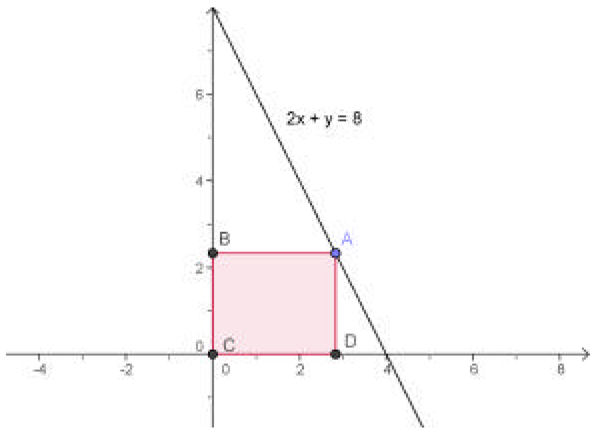
$f(x)$ és creixent en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; és decreixent en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$. Té un màxim en $(0, -3)$ i un mínim en $\left(\frac{2}{3}, \frac{-5}{3}\right)$.

e)



6) Dins del triangle limitat pels eixos OX, OY i la recta r: 2X+Y=8 s'inscriu un rectangle que té un vèrtex a l'origen (0,0), dos costats sobre els eixos i l'altre vèrtex sobre la recta r.

Determineu quin és el punt de la recta que fa que l'àrea del rectangle ABCD sigui màxima i el valor d'aquesta àrea màxima.



Si A(X,Y) aleshores la funció a optimitzar és f(x,y)=X·Y
Però com sabem que el punt A és de la recta r aleshores y=8–2x la qual cosa ens permet obtenir la funció d'una única variable que hem d'optimitzar:

f(x)=X·(8–2X) = 8 X – 2 X^2
f ' (x) = 8 – 4 X
f'' (x) = –4
Així doncs els candidats a màxims o mínims són els x t .q. f ' (x) = 0 és a dir X=2
i com f '' (2)<0 podem assegurar que en X=2 hi ha un màxim de la funció buscada.

Solució: el punt és el A(2,4) i l'àrea màxima és 8 u^2

7) Calculeu les integrals:

a) $\int \frac{3x\sqrt{x}+14x^3+1}{x^2}\,dx$ b) $\int \frac{7\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx$

c) $\int 3x\; e^{14x^2+2007}\,dx$

a) $\int 3x^{-1/2}+14x+x^{-2}\;dx = 6x^{1/2}+\frac{14}{2}x^2 - x^{-1}+K$

b) $\int \frac{7\sin(x)}{\cos^3(x)}dx = -7\int -\sin(x)\cos^{-3}(x)dx = \frac{-7\cos^{-2}(x)}{-2}+K = \frac{7\cos^{-2}(x)}{2}+K$

c) $\int 3x\; e^{14x^2+2007}\,dx = \frac{3}{28}\int 28x\; e^{14x^2+2007}\,dx = \frac{3}{28}e^{14x^2+2007}+K$

2n BLOC:

8) Calculeu l'àrea del recinte pla limitat per les rectes Y=X, Y=2 X i la paràbola $Y=X^2$

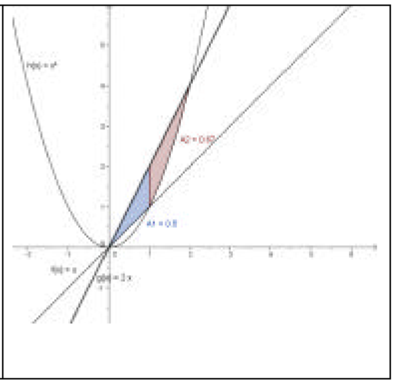
Busquem els punts de tall de les diferents parelles de corbes:

$\left.\begin{array}{l} Y=x \\ y=2x \end{array}\right\}(0,0)$ $\left.\begin{array}{l} Y=x \\ y=x^2 \end{array}\right\}(0,0)\;\; i\;\; (1,1)$ $\left.\begin{array}{l} Y=2x \\ y=x^2 \end{array}\right\}(0,0)\;\; i\;\; (2,4)$

fent el dibuix que és immediat es té que A=A1+A2

A= $\int_0^1 2x-x\;dx+\int_1^2 2x-x^2\;dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$

$= \frac{1}{2}+\left(4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$



9) Trobeu les integrals següents:

a) $\int x\cdot e^{x^2}\;dx$ ***b)*** $\int \frac{x\,dx}{x^2-9}$

Heu tingut sort, ja que volia posar $\int x\;e^{2x}\;dx.$ però l'exponent l'he pujat a l'enunciat per error. Així doncs ha quedat immediata:

$\int x\cdot e^{x^2}\;dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2}\;dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+K$

La que volia posar

$\int x\ e^{2x}\ dx$. Integrem per parts:

$$\begin{cases} u = x & \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{2x}\ dx & \rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x\ e^{2x}\ dx = \frac{x}{2}\ e^{2x} - \int \frac{1}{2}\ e^{2x}\ dx = \frac{x}{2}\ e^{2x} - \frac{1}{4}\ e^{2x} + k = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + k$$

b) $\int \frac{x}{x^2-9}\ dx$

Mètode curt: Observeu que és immediata només falta multiplicar per 2

$$\int \frac{x}{x^2-9}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-9}\ dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-9) + K = \frac{1}{2}\ln((x+3)(x-3)) + K = \frac{1}{2}\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + K$$

Mètode llarg: Fem la descomposició en fraccions simples

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{x}{(x-3)\ (x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)\ (x+3)}$$

- Per a $x = 3 \rightarrow 3 = 6A \rightarrow A = \frac{1}{2}$
- Per a $x = -3 \rightarrow -3 = -6B \rightarrow B = \frac{1}{2}$

Per tant:

$$\int \frac{x}{x^2-9}\ dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2}\ ln\ |x-3| + \frac{1}{2}\ ln\ |x+3| + k$$

10) Considereu la recta que r i el pla p donats per les equacions següents

$$r : \begin{cases} (m+1)\ X + Y & = m+1 \\ mX + Y & = m \end{cases}$$

$$p :\ mX + Y + (m^2-1)Z \ = 3m+2$$

Discutiu, segons el valor del paràmetre m, el sistema format per aquestes 3 equacions i interpreteu geomètricament quina és la posició relativa de r i p en cada cas.

Fem la discussió del sistema d'equacions:
Det(A)= m^2–1 amb la qual cosa es veu que hi ha tres casos:

I) m$\neq 1,-1$ surt SCD per tant es tallen en un únic punt
II) m=1 surt SI per tant són paral·lels
III) m=-1 Surt SCI amb 1 grau de llibertat, és a dir la recta està contingudа en el pla

11) Donats els punt P(2,1,–2), la recta r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ i el pla p : $4x - 3y + 5 = 0$ calculeu

a) La distància de P a π.
b) La projecció perpendicular del punt P sobre la recta r
c) L'angle format per la recta r i el pla π.

a) $dist(P,\pi)=\frac{|4\cdot 2-3\cdot 1+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|8-3+5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$

b) El peu de la perpendicular serà un R_t(1+3t, –t,–2+t) tal que $\overrightarrow{PR_t}$ sigui perpendicular a un director de r V=(3,–1,1) així doncs $\overrightarrow{PR_t}\cdot\vec{V}$ =0

3 + 9 t + t –2+t =0 ===> t= $\frac{-1}{11}$

Així doncs R(8/11, 1/11, –23/11)

c) Un vector direcció de r és $\vec{d}(3,-1,1)$.

Un vector normal a p és $\vec{n}(4,-3,0)$.

Si anomenem α l'angle que formen π i r, tenim que:

$$cos(90^o-\alpha)=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{15}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{25}}=\frac{15}{5\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}\approx 0{,}905$$

$\rightarrow\ 90^o-\alpha=25^o\ 14'\ 22''\ \rightarrow\ \alpha=64^o\ 45'\ 38''$

12) Donades les dues rectes

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2} \quad \text{i} \quad s:\begin{cases}x=1+l\\ y=2l\\ z=-1+l\end{cases}$$

a) Calculeu la distància entre les rectes
b) Trobeu l'equació de la perpendicular comuna

a)
R(2,–1,0) i V_r=(1,3,–2)
S(1,0,–1) i V_s=(1,2,1)
$\overrightarrow{RS}$=(–1,1,1)

$$d=\frac{\left|\left[\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{v_r}\wedge\vec{v_s}\right|}=\frac{|-11|}{|(7,-3,-1)|}=\frac{11}{\sqrt{49+9+1}}=\frac{11\sqrt{59}}{59}\approx 1{,}43\ u$$

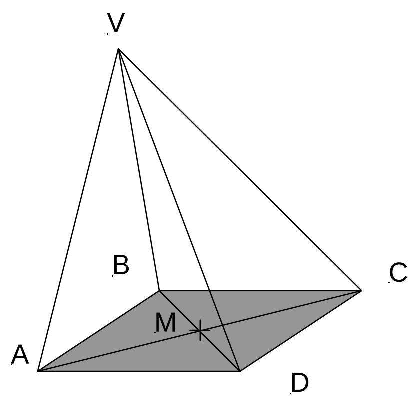
b)
Si aquesta recta és t sabem que podem agafar com vector director el
$\vec{v_t}=\vec{v_r}\wedge\vec{v_s}=(7,-3,-1)$
I aleshores només ens falta un punt per on passa t.
Sigui P(x,y,z) $\in$ t aleshores només cal que imposem que

- t talla a r==> det ($\vec{v_r},\vec{v_t},\overrightarrow{RP}$)= $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 7 & -3 & -1\\ x-2 & y+1 & z\end{vmatrix}=0$ ===> –9X-13Y-24Z+5=0

- t talla a s $\det(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{SP}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & -1 \\ x-1 & y & z+1 \end{vmatrix} = 0$ ===> X+8Y–17Z–18= 0

Conclusió la recta t és la recta donada per les equacions:
–9X-13Y-24Z+5=0
X+8Y–17Z–18= 0

13) Donada la piràmide ABCDV de base el parel·lelogram ABCD i vèrtex V.



En una referència ortonormal sabem les coordenades de A(1,0,2), B(3,1,0), V(0,0,1) i les del centre del paral·lelogram ABCD M(0,2,–3).

Calculeu:

a) les coordenades de la resta dels vèrtexs (C i D).
b) El volum de la piràmide.
c) L'àrea de la base ABCD.
d) L'alçada de la piràmide.

a)

Si C(x,y,z) i com M és el punt mig de $\overline{AC}$ tenim que (x+1)/2=0; y/2=2 i (z+2)/2=–3 amb la qual cosa tenim que C(-1,4,-8)

Si D(x,y,z) i com M és el punt mig de $\overline{BD}$ tenim que (x+3)/2=0; (y+1)/2=2 i Z/2=–3 amb la qual cosa tenim que D(–3,3,–6)

b)

El volum V= $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AV}\right]\right|}{3} = \left|\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & -1 \end{vmatrix}}{3}\right| = \dfrac{|-8|}{3} = \dfrac{8}{3}u^3$

c) Àrea de la base = $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right| = \left|(-2,24,10)\right| = 2\sqrt{170} \simeq 26{,}977 \quad u^2$

d) d= Volum/ (Àrea de la base)= $\dfrac{8/3}{2\sqrt{170}} = \dfrac{2\sqrt{170}}{255} \simeq 0.1022619985u$