Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Examen final

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data: 21/5/2007**

- Qui hagi de recuperar els dos blocs només ha de fer els exercicis: 2, 4, 5, 6, 8, 9 i 11
- Qui hagi de recuperar només un bloc ha de fer tots els exercicis del bloc corresponent.

1r BLOC:

1) Trobeu els límits:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2-2x+9}\right]$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-2x-4}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}}$

2) Trobeu els valors de ***a*** i **b** per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + ax & \textbf{si} \quad x < -1 \\ bx^2 + 1 & \textbf{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

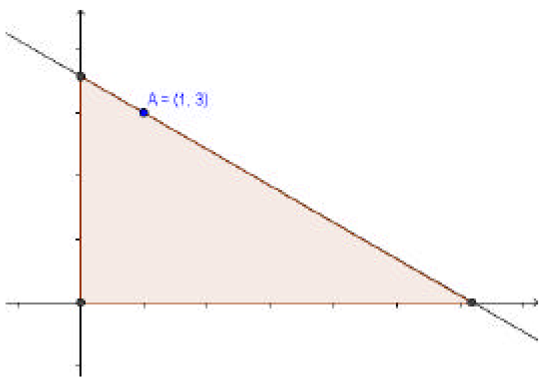
3) Deriveu les funcions següents:

a) $f(x) = \sin^2(3x^2 - 2009)$ b) $f(x) = [x^2-2]^{3x-5}$ c) $y = \pi^e - 5\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{7}{\sqrt[2]{x^5}}$

4) Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

a) Determineu quin és el seu domini.
b) Trobeu les seves asímptotes i l'aspecte de la gràfica al seu voltant.
c) Calculeu i simplifiqueu al màxim la primera derivada
d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
e) Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció.

5) De totes les rectes del pla que passen pel punt A(1,3), trobeu quina és la que forma amb els semieixos positius de OX i OY el triangle d'àrea mínima.



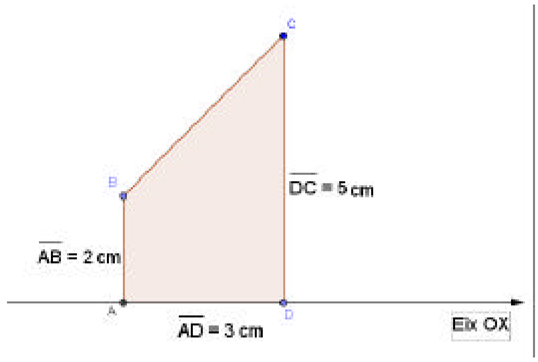
6) Calculeu les integrals:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2\sqrt{x^3} - 5x^6 - 3}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\sin(x^2+3)\,dx =$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4}{e^{20x^5+2009}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx =$

2n BLOC:

7) Calculeu mitjançant integrals el volum del cos de revolució generat al girar la zona tancada del dibuix al voltant de l'eix OX. (observa que es genera un tron de con)



8) Trobeu la matriu X que verifica: A + X·B = C on les matrius A, B i c són:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

9) Discutiu, segons el valor del paràmetre m, el sistema format per aquestes 3 equacions i interpreteu geomètricament quina és la posició relativa dels 3 plans a, b, g en cada cas.

$$\left.\begin{array}{llllllll} a: & x & + & y & + & 3z & = & 5 \\ b: & -x & & & + & mz & = & m \\ g: & 2x & + & my & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

10) Trobeu les coordenades del punt simètric de P(1, – 3, 7) respecte la recta

$$r : x - 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{3}$$

11) Donades les dues rectes:

$$r : \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{4} \quad \text{i} \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 11 \\ 4y - z = -4 \end{array} \right.$$

a) Trobeu un vector director i un punt de cadascuna de les rectes
b) Discutiu la seva posició relativa.

(1)

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-2x+9} = \infty-\infty$ cal mult. i div. pel conjugat

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-2x+9}\right)\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+2x-9}\right)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x+9}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-2-\cancel{x^2}+2x-9}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-2x-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ Aplicant L'HÔPITAL o DIVIDINT per $x-2$ NUM i denominador. queda

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-2x-4}{x^2-3x+2} = \begin{cases} \overset{\text{L'HÔP}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{4x-2}{2x-3} = \frac{6}{1} = 6 \\ = \lim_{x\to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{2\cdot 3}{1} = 6 \end{cases}$$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$ i es pot solucionar per L'HÔP o per ordre d'infinits

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} \underset{\text{L'HÔP}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}\text{ L'HÔP}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{4e^{2x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}\text{ L'HÔP}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{8e^{2x}} =$$

$$= \frac{6}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = 0^+$$

com $\Theta(e^x) > \Theta(x^3)$

(2)

CONTINUA i derivable clarament en $\mathbb{R}-\{-1\}$ i ara només cal suposar que ho segui en $x=-1$

$$f'(x)=\begin{cases} = 3x^2-2x+a & \text{si } x<-1 \\ = 2bx & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{CONT en } x=-1}$ $\Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned} & f(-1) = b(-1)^2+1 = b+1 \\ & \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x^3-x^2+ax = -1-1-a = -2-a \\ & \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} bx^2+1 = b+1 \end{aligned}\right\}$$

Han de ser iguals $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $b+1=-2-a$

$$\boxed{a+b=-3}$$

$\boxed{\text{DERIV en } x=-1}$ $\Rightarrow$ $\exists f'(-1^-)$
$\exists f'(-1^+)$
i han de ser iguals

$$\left\{\begin{aligned} & f'(-1^-) = 3+2+a = 5+a \\ & f'(-1^+) = -2b \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ $5+a=-2b$

$$\boxed{a+2b=-5}$$

I solucionant el sistema

$$\left.\begin{aligned} a+b&=-3 \\ a+2b&=-5 \end{aligned}\right\} \quad 2^a-1^a$$

$\boxed{b=-2}$ i substituint en la 1a queda

$a=-3-b$
$a=-3+2 \Rightarrow$ $\boxed{a=-1}$ $\Rightarrow$

Solució
$a=-1$
$b=-2$

(3)

a) $f(x) = \sin^2(3x^2-2009)$

$f'(x) = 2\sin(3x^2-2009)\cdot\cos(3x^2-2009)\cdot 6x$

b) $f(x) = (x^2-2)^{3x-5}$ cal fer-ho per derivació logarítmica

$y = (x^2-2)^{(3x-5)}$

$\ln y = \ln\left[(x^2-2)^{(3x-5)}\right] = (3x-5)\cdot\ln(x^2-2)$ Prop dels logaritmes

I ara derivem

$$\frac{y'}{y} = 3\cdot\ln(x^2-2) + 3x^2-5\ \frac{2x}{x^2-2}$$

$$y' = \left[3\ln(x^2-2) + \frac{2x(3x^2-5)}{x^2-2}\right](x^2-2)^{(3x-5)}$$

c) $y = \pi^e - 5\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{7}{\sqrt[2]{x^5}} = \pi^e - 5x^{2/3} - 7x^{-5/2}$

$$y' = 0 - 5\,\frac{2}{3}\,x^{-1/3} - 7\left(\frac{-5}{2}\right)\cdot x^{-7/2}$$

$$y' = \frac{-10}{3}\,x^{-1/3} + \frac{35}{2}\,x^{-7/2}$$

(4)

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

a) DOMINI $f = \mathbb{R} - \{2\}$

b) ASIMP. VERT per $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x=2$

INC. $y = mx + n$

a) $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-2} - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\boxed{y = x + 2 \text{ és ASIMP. per } x \to \pm\infty}$$

b) $x \to -\infty$ Idem ja que és un quocient de polinomis

---

c) $$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

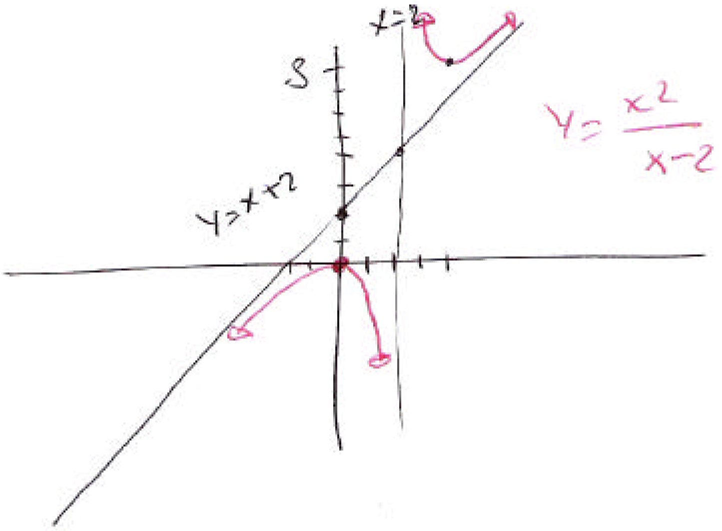
$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{x-2} =$$

d)

x		0		2		4	
y	↗	0	↘		↘	8	↗
y'	+	0	−		−	0	+

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 4$

- màxim local en $x = 0$ $y = f(0) = 0$ $(0,0)$
- mínim local en $x = 4$ $y = f(4) = \frac{16}{2} = 8$ $(4,8)$
- Creix $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
- Decreix $\forall x \in (0,2) \cup (2, +4)$



(5) Una Recta per $A(1,3)$ té equació

$$y-3 = m(x-1)$$

$$\boxed{y = mx - m + 3}$$

tallant amb Eix OY $(x=0) \Rightarrow \boxed{y = 3-m}$ $\quad (0, 3-m)$

tallant amb Eix OX $(y=0) \Rightarrow -3+m = mx$

$$\boxed{\frac{m-3}{m} = x} \quad \left(\frac{m-3}{m}, 0\right)$$

$$\text{Àrea (del triangle)} = \frac{(m-3)}{m} \cdot (3-m) \frac{1}{2}$$

$$f(m) = -\frac{m^2-6m+9}{2m}$$ m és la variable respecte la que derivo.

$$f'(m) = -\frac{(2m-6)\cdot 2m - (m^2-6m+9)\cdot 2}{m^2} =$$

$$= -\frac{4m^2 - \cancel{12m} - 2m^2 \cancel{+12m} - 18}{m^2} = \frac{-(2m^2-18)}{m^2} = \frac{-(m^2-9)}{m^2}$$

$f'(m) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

Com volem que $3 - m > 0 \Rightarrow$

m	-3	0	3	
$f(m)$	$\searrow$ $\nearrow$	‖	$\nearrow$	$\searrow$
$f'(m)$	$-\ 0\ +$	‖	$+$	$0\ -$
	MIN		MAX	

$$f(m) = \frac{m^2-6m+9}{2m}$$

$\Rightarrow$ la FUNCIÓ TÉ UN MÍNIM en $\boxed{m=-3}$

$\Rightarrow$ la Recta és

$$\boxed{y-3 = -3(x-1)}$$

$$\boxed{y = -3x+6}$$

I l'area mínima és $f(-3)=6$

(6)

a) $\displaystyle\int \frac{3\cancel{x^2}\sqrt{x^3}}{\cancel{x}}\,dx - \int \frac{5x^{\cancel{6}\,5}}{\cancel{x}}\,dx - \int \frac{3}{x}\,dx =$

$\displaystyle = \int 3\,x^{1+\frac{3}{2}}\,dx - 5\int x^5\,dx - \int \frac{3}{x}\,dx =$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5\frac{x^6}{6} - 3\ln|x| + C = \frac{6}{7}x^{7/2} - \frac{5x^6}{6} - 3\ln|x| + C.$

b) $\displaystyle -\frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2+3)\,dx = \frac{-1}{2}\cos(x^2+3) + C$

c) $\displaystyle \int \frac{x^4}{e^{20x^5+2009}}\,dx = \int x^4\, e^{-20x^5-2009}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{-1}{100}\int -100x^4\, e^{-20x^5-2009}\,dx = \frac{-e^{-20x^5-2009}}{100} + C$

d) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = I$

$x^3-x^2-x+1 = (x+1)(x-1)^2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-1)$

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1)$

Si $x=1 \Rightarrow 8 = 2\cdot C \Rightarrow C=4$

Si $x=-1 \Rightarrow 2 = A\cdot 4 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

Si $x=0 \Rightarrow 5 = A - B + C \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} - B + 4$

$B = \frac{1}{2} - 1$

$B = -\frac{1}{2}$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + 4\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) - \frac{4}{x-1} + C$$

(7)

$\left.\begin{array}{l} B(0,2) \\ C(3,5) \end{array}\right|$ Recta $\overleftrightarrow{AB}$ pendent $\frac{5-2}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$

$\left.\begin{array}{l} y = x + n \\ \text{Passa per } (0,2) \end{array}\right\}$ $\boxed{y = x + 2}$

$$\text{Volum} = \pi \int_0^3 (x+2)^2 dx = \pi \int_0^3 x^2 + 4x + 4 \quad dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{4}^{2} x^2}{\cancel{2}} + 4x \right]_0^3 = \pi (9 + 18 + 12 - 0 \quad) = \underline{\underline{39 \pi \text{ cm}^3}}$$

(8)

$$A + X \cdot B = C$$

$\left.\begin{array}{l} XB = C - A \\ \text{Si } \exists B^{-1} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} X \cdot BB^{-1} = (C-A) B^{-1} \\ X = (C-A) \cdot B^{-1} \end{array}$

$$(C - A) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 16 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{(\text{adj } B)^T}{|B|} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 16 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 & -6 \\ -12 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Per Cramer

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & m \\ 2 & m & 0 \end{vmatrix} = 2m-3m-m^2 = -m^2-m = -m(m+1)$$

$|A| \neq 0 \iff \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$

$\boxed{\text{CAS I}}$ $m \neq 0, -1 \Rightarrow Rg\ A = 3$
$Rg(A_{ampl}) \geq Rg(A) = 3 \Rightarrow Rg(A_{ampl}) = 3$
3 INC. $\Big\}$ SCD

$\Rightarrow$ Els 3 plans es tallen en un únic PT.

$\boxed{\text{CAS II}}$ $m=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- $Rg(A) = 2$
  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$
- $Rg(A_{ampl})$
  orlant el $\Delta_2 \neq 0$ amb $\vec{b}$ i F3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Big\}$ $Rg(A) = 2$, $Rg(A_{ampl}) = 2$, $INC = 3$

$\Rightarrow$ S.C.I amb 1 grau de llibertat $\Rightarrow$ Els 3 plans es tallen en una recta.

$\Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = 1$ recta

$\boxed{\text{CAS III}}$ $m=-1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- $Rg(A) = 2$
  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$
- $Rg(A_{ampl})$

orlant el $\Delta_2 \neq 0$ amb $\vec{b}$ i F3 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2+5 = 3 \neq 0 \Big\}$ $Rg(A_{ampl}) = 3$

$\Rightarrow$ S.C.I $\Rightarrow$ Els 3 plans no tenen cap punt en comú

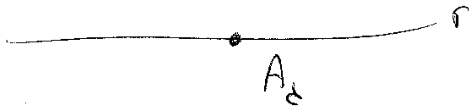
α i β com $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{0} \Rightarrow \alpha$ i β es tallen en una recta

α i γ $\quad \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \alpha$ i β es tallen en una recta

β i γ $\quad \frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-1} \Rightarrow \alpha$ i β ————

Però tots 3 plans no tenen cap punt en comú

(10) Primer hem de trobar el peu de la perpendicular de P a r $\quad \cdot P(1,-3,7)$



$A_\lambda \in r$ un pt arbitrari de r

$A_\lambda(1+\lambda, -3+\lambda, 4+3\lambda)$

$\vec{V_r} = (1,1,3)$

Imposem que $\vec{PA_\lambda} \perp \vec{V_r}$

$$(\cancel{1}+\lambda-\cancel{1}, \cancel{-3}+\lambda+\cancel{3}, 4+3\lambda-7)\cdot(1,1,3) = 0$$

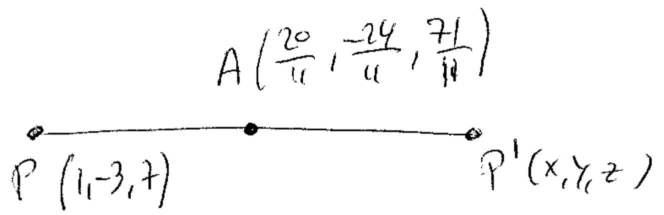
$$\lambda+\lambda+(3\lambda-3)\cdot 3 = 0$$

$$\lambda+\lambda+9\lambda-9 = 0$$

$$11\lambda = 9$$

$\boxed{\lambda = \frac{9}{11}}$ $\Rightarrow$ El peu de la perpendicular es $A_{\frac{9}{11}}$

$$A_{\lambda=\frac{9}{11}}\left(\frac{9}{11}+1, -3+\frac{9}{11}, 4+3\cdot\frac{9}{11}\right) = \left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right)$$



A é o pt Mj de $\overline{PP'}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = \frac{20}{11} \\ \frac{y-3}{2} = \frac{-24}{11} \\ \frac{z+7}{2} = \frac{71}{11} \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} x = \frac{40}{11} - 1 = \frac{29}{11} \\ y = 3 - \frac{48}{11} = \frac{-15}{11} \\ z = \frac{142}{11} - 7 = \frac{65}{11} \end{array}\right\} \quad P'\left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$$

(11)

$$r: \frac{\cancel{3x-6}^{\,x-2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{V_r} = (3,1,4) \\ A \in r \quad A\,(2,0,1) \end{array}$$

$$s \quad \left.\begin{array}{l} x - 3y = 11 \\ 4y - z = -4 \end{array}\right| \qquad B \in r \quad y=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 11 \\ z = 4 \end{array}\right\} (11,0,4)$$

$$\vec{V_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (+3, 1, 4)$$

$$Rg\,(V_r, V_s) = Rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ +3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\Uparrow}{=} 1 \Rightarrow r \parallel s \text{ o } r = s$$

$$\frac{+3}{+3} = \frac{1}{1} = \frac{4}{4}$$

$$Rg\,(V_r, V_s, \vec{AB}) = Rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ +3 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\Uparrow}{\overset{F1=F2}{=}} Rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\Uparrow}{=} 2 \Rightarrow$$

Com Vr i Vs són //

$Rg(V_r, \vec{AB})$

$$\frac{3}{-5} \neq \frac{1}{1}$$

$\Rightarrow r \parallel s$