Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Geometria afí i mètrica

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

---

1) Donades les rectes $r: \left\{ \dfrac{x-2}{3} = y = \dfrac{z-1}{4} \right.$ i $s: \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + l \\ z = 4 \end{cases} \quad \forall l \in R$ i

el pla p : 4x + z – 4 = 0

a) Trobeu un punt i un vector director de cada recta
b) Trobeu un punt, un vector normal i un parell de vectors directors del pla p
c) Discutiu la posició relativa de r i p .
d) Calculeu l'angle que forma r amb p
e) Discutiu la posició relativa de s i p .
f) Calculeu la distància de la recta s al pla p
g) Estudieu la posició relativa de r i s
h) Distància de r i s
i) Trobeu les equacions implícites de la recta perpendicular comú a r i s

(0,4+0,4+0,5+0,5+0,5+0,6+0,6+1+1=5,5 punts)

2) Donats els punts P(1,2,4) i el pla p : x + y + z = 1

a) Projecteu perpendicularment el punt P sobre el pla p (és a dir trobeu la intersecció del pla p i la recta perpendicular a p que passa per P)
b) Trobeu el punt simètric del punt P respecte el pla p

(1+0,5=1,5 punts)

3) Donats els plans a : 2x + y – z + 1 = 0 i b : 4x + a y + bz +3 = 0

a) Trobeu a i b per a que siguin paral·lels
b) Calculeu en aquest cas la distància entre ells.

(0,5+0,5=1punt)

4) Quins són els punts de la recta que passa per A(0,1,2) i B(0,2,1) que amb els punts M(–1,0,0), P(1,0,0) i Q(0,1,1) forma un tetràedre de volum 1 unitat^3

(2 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donades les rectes $r : \left\{ \frac{x-2}{3} = y = \frac{z-1}{4} \right.$ i $s : \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + l \\ z = 4 \end{cases} \quad \forall l \in R$ i

el pla p : 4x + z – 4 = 0

a) Trobeu un punt i un vector director de cada recta
b) Trobeu un punt, un vector normal i un parell de vectors directors del pla p
c) Discutiu la posició relativa de r i p .
d) Calculeu l'angle que forma r amb p
e) Discutiu la posició relativa de s i p .
f) Calculeu la distància de la recta s al pla p
g) Estudieu la posició relativa de r i s
h) Distància de r i s
i) Trobeu les equacions implícites de la recta perpendicular comú a r i s

(0,4+0,4+0,5+0,5+0,5+0,6+0,6+1+1=5,5 punts)

1

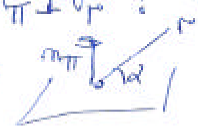
a) $r: \begin{cases} R(2,0,1) \in r \\ \vec{v_r} = (3,1,4) \end{cases}$ $\quad s \begin{cases} S(5,2,4) \\ \vec{v_s} = (0,1,0) \end{cases}$

b) $\pi: 4x + z - 4 = 0 \Rightarrow$ PUNT $(0,0,4)$
$\vec{n_\pi}\ (4,0,1)$

En paramètriques

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \mu \\ z = 4 - 4\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{v} = (1,0,-4) \\ \vec{w} = (0,1,0) \end{matrix} \Big\} \text{ Són L.I. VECTORS DIRECTORS de } \pi$$

c) $\vec{n_\pi} \perp \vec{v_r}$? $\vec{n_\pi} \cdot \vec{v_r} = (4,0,1)(3,1,4) = 12 + 4 = 16 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  π i r es tallen en un punt

d) α és $\measuredangle(r, \pi) \Rightarrow \cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{n_\pi} \cdot \vec{v_r}|}{|\vec{n_\pi}||\vec{v_r}|}$
$\cos(90°-\alpha) = \sin(\alpha)$

$$\sin\alpha = \frac{|16|}{\sqrt{16+1}\ \sqrt{9+1+16}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{16}{\sqrt{17}\sqrt{26}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{16}{\sqrt{17}\sqrt{26}}\right) = \arcsin(0{,}76104239) = 49{,}556° = 49°\ 31'\ 22''$$

e) $\vec{n_\pi} \perp \vec{v_s}$? $\vec{n_\pi} \cdot \vec{v_s} = (4,0,1)\cdot(0,1,0) = 0 \Rightarrow$ Sí són $\perp$

$\Rightarrow \pi // s$ o $s \subset \pi$

Per veure quin cas és podem mirar si $S \in \pi$?

$$\left.\begin{array}{l} S(5,2,4) \\ \pi: 4x+z-4=0 \end{array}\right\} \quad 20+4-4 \neq 0 \Rightarrow S \notin \pi \Rightarrow s // \pi$$

f) Com $s // \pi$ $d(s,\pi) = d(\underset{\text{PUNT}}{S};\pi) = \dfrac{|\cancel{20+4-4}|}{\sqrt{16+1}} = \dfrac{20\sqrt{17}}{17}$ unit

g) Posició relativa de r i s

$$r\left\{\begin{array}{l} R(2,0,1) \\ \vec{v_r} = (3,1,4) \end{array}\right. \qquad s\left\{\begin{array}{l} S(5,2,4) \\ \vec{v_s} = (0,1,0) \end{array}\right. \Rightarrow \vec{RS} = (3,2,3)$$

- $\vec{v_r}$ i $\vec{v_s}$ són L.I. ja que $\frac{3}{0} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow$ r i s són secants o es creuen.

- $\det(\vec{v_r}, \vec{v_s}; \vec{RS}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Desen. C2}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9-12 = -3 \neq 0$

$\Rightarrow$ r i s es CREUEN

h) $d(r,s) = \dfrac{|[\vec{v_r}, \vec{v_s}; \vec{RS}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{3}{5}$ unit

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4,0,3)$$

i) $\left.\begin{array}{l} t \perp r \\ t \perp s \end{array}\right\} \quad \vec{v_t} \perp \begin{array}{l} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{array} \Bigg\} \Rightarrow$ Puc agafar com $\vec{v_t} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (-4,0,3)$

I ara ja només cal imposar que

$X(x,y,z) \in t \Leftarrow$

t i r es tallen $\Rightarrow \det(\vec{RX}; \vec{v_t}; \vec{v_r}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -4 & 3 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

t i s es tallen $\Rightarrow \det(\vec{SX}, \vec{v_t}, \vec{v_s}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-5 & -4 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -4z+4+9y-3x+6+16y=0 \\ \\ -3x+15-4z+16=0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} -3x+25y-4z+10=0 \\ \\ -3x \qquad -4z+31=0 \end{array}}$$

Recta t

2) Donats els punts P(1,2,4) i el pla p : x + y + z = 1

a) Projecteu perpendicularment el punt P sobre el pla p (és a dir trobeu la intersecció del pla p i la recta perpendicular a p que passa per P)

b) Trobeu el punt simètric del punt P respecte el pla p

(1+0,5=1,5 punts)

2

EQ. PARAMÈTRIQUES

a) $r \perp \pi$ per P $\Rightarrow r \begin{cases} \text{PUNT } P(1,2,4) \\ \vec{v_r} = \vec{n_\pi} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ara fem $r \cap \pi$ agafant un punt arbitrari de r en paramètriques

$r \cap \pi = R_\lambda$ per cert λ on $R_\lambda(1+\lambda, 2+\lambda, 4+\lambda) \in r$ i

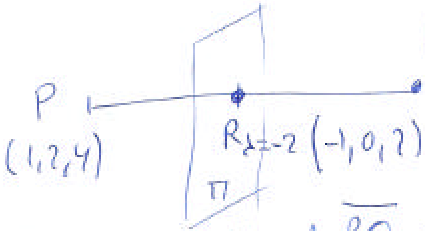
$R_\lambda \in \pi \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+4+\lambda = 1$

$3\lambda = -6$

$\lambda = -2$

$r \cap \pi = R_{\lambda=-2}(-1,0,2)$

b) $Q(x,y,z) \leftarrow$ PUNT BUSCAT



$R_{\lambda=-2}$ és el PT Mig de $\overline{PQ} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{2} = -1 \\ \frac{2+y}{2} = 0 \\ \frac{4+z}{2} = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow Q(-3,-2,0)$

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

3) Donats els plans α : 2x + y – z + 1 = 0 i β : 4x + a y + bz +3 = 0

   a) Trobeu a i b per a que siguin paral·lels

   b) Calculeu en aquest cas la distància entre ells.

(0,5+0,5=1punt)

3 a) $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{a}{1} = \frac{b}{-1} \neq \frac{3}{1}$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = a \\ 2 = -b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -2 \end{array}}$$

b) $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ $\quad A(0,0,1) \in \alpha$

$\beta: 4x + 2y - 2z + 3 = 0$

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow d(\alpha, \beta) = d(A; \beta) = \frac{|4\cdot 0 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1 + 3|}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{1}{\sqrt{24}} =$$

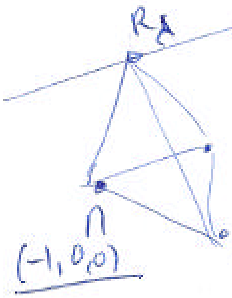
$$= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ unitats.}$$

4) Quins són els punts de la recta que passa per A(0,1,2) i B(0,2,1) que amb els punts M(–1,0,0), P(1,0,0) i Q(0,1,1) forma un tetràedre de volum 1 unitat[3]

(2 punts)

4) $\overleftrightarrow{AB}$ $\left\{ \begin{array}{l} A(0,1,2) \\ \overrightarrow{AB} = (0,1,-1) \end{array} \right\}$ Eq. Paramètriques

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



P(1,0,0)

Q(0,1,1)

$R_\lambda (0, 1+\lambda, 2-\lambda) \in r$

Volum del Tetràedre $\Rightarrow$ $V = 1$

$$\frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{MR_\lambda}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ} \right] \right| = 1$$

$$\left| \left[\overrightarrow{MR_\lambda}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ} \right] \right| = 6 \Rightarrow \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1+\lambda & 0 & 1 \\ 2-\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 6 \Rightarrow$$

$$| 4 - 2\lambda - 2 - 2\lambda | = 6 \Rightarrow |2 - 4\lambda| = 6$$

$2 - 4\lambda = 6$
$-4 = 4\lambda$
$\boxed{-1 = \lambda}$

$2 - 4\lambda = -6$
$8 = 4\lambda$
$\boxed{\lambda = 2}$

Per tant hi ha dues solucions

1a) $R_{\lambda=-1} (0, 0, 3)$

2a) $R_{\lambda=2} (0, 3, 0)$